Applications linéaires : introduction

Exercice 1 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_3, x_1, a) \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) + P'(0) \end{array}$
4. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & 1 + P' \end{array}$
5. $v : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array}$
6. $w : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (3^n u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

Exercice 2 (★). Soit a un réel. Parmi les applications suivantes, déterminer (éventuellement en fonction des valeurs de a) celles qui sont linéaires :

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, a) \end{array}$
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (ax, ay) \end{array}$
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + a, y + a) \end{array}$

Exercice 3 (★★). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $x \in E$. Traduire les phrases suivantes.

1. $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
2. $x \in \mathrm{Im}(v)$.
3. $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.
4. $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.
5. $x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.
6. $x \in \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u)$.
7. $x \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E) + \mathrm{Im}(v)$.
8. $x \in \mathrm{Ker}(u^2) \cap \mathrm{Im}(u + v)$.

Exercice 4 (★). Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer une base de leurs noyaux.

1. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, y + z) \end{array}$
2. $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(-1)) \end{array}$

Exercice 5 (★). Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^5$ définie pour tous α, β réels par

$$f\left((\alpha, \beta)\right) = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et préciser leur dimensions.
3. f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 6 (★). Soit f définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ par $f(P(X)) = P'(X) + P(1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 7 (★★). Déterminer une application linéaire u de sorte que l'ensemble F soit le noyau de u :

1. $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{t \mapsto C \mid C \in \mathbb{R}\}$ (ensemble des fonctions constantes)
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in E | x = 2y\}$
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in E | P'(1) = 0 \text{ et } P(2) = P''(0)\}$
4. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, F est l'ensemble des suites géométriques de raison 3

Exercice 8 (★★). Soient $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ deux entiers. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$ est une famille libre alors $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une famille libre.

Exercice 9 (★★). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Exercice 10 (★★). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E.$$

Exercice 11 (★). On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y, 0, z).$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
2. Montrer que f est un projecteur, dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 12 (★). Soit $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.
Montrer que φ_A est une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 13 (★). On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | a - b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Calculer le projeté d'un vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Exercice 14 (★★). On fixe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ égal au reste dans la division euclidienne de P par Q.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur et expliciter ses noyau et image.

Exercice 15 (Type DS)**.** Soit $u = (2,1,-1)$, $v = (1,-1,3)$, $w = (3,3,-5)$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$.

1. Déterminer une base de F.
2. Montrer que $f : (\alpha,\beta,\gamma) \mapsto (3\alpha+\gamma, \alpha-\beta+\gamma, -3\alpha-3\beta+\gamma)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?
6. Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\mathrm{Im}(f)$?
7. Déterminer une base et la dimension de $F \cap \mathrm{Im}(f)$.