Exercices PCSI
É.Bouchet

Applications linéaires : introduction

Exercice 1 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_3, x_1, a) \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) + P'(0) \end{array}$
4. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & 1 + P' \end{array}$
5. $v : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array}$
6. $w : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (3^n u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

Résultat attendu :

1. Oui
2. Seulement si $a = 0$
3. Oui
4. Non
5. Non
6. Oui

Exercice 2 (★★). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $x \in E$. Traduire les phrases suivantes.

1. $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
2. $x \in \mathrm{Im}(v)$.
3. $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.
4. $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.
5. $x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.
6. $x \in \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u)$.
7. $x \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E) + \mathrm{Im}(v)$.
8. $x \in \mathrm{Ker}(u^2) \cap \mathrm{Im}(u + v)$.

Résultat attendu :

1. $u(x) = 0$
2. $\exists z \in E$ tq $x = v(z)$
3. $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
4. $u(x) = 0$ et $\exists z \in E$, $x = u(z)$
5. $\exists (a, b) \in E^2$ tq $x = a + b$, $u(a) = 0$ et $v(b) = 0$
6. $\exists (a, z) \in E^2$ tq $x = a + u(z)$ et $v(a) = 0$
7. $\exists (a, z) \in E^2$ tq $x = a + v(z)$ avec $u(a) + a = 0$
8. $u^2(x) = 0$ et $\exists z \in E$ tq $x = (u + v)(z)$

Exercice 3 (★). Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer une base de leurs noyaux.

1. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, y + z) \end{array}$
2. $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(-1)) \end{array}$

Résultat attendu :

1. $((1, 1, -1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$
2. $(X^2 + 2X)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\psi)$

Exercice 4 (★). Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^5$ définie pour tous α, β réels par

$$f((\alpha, \beta)) = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et préciser leur dimensions.
3. f est-elle surjective ? injective ?

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ est de dimension 0. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1, 3, -1), (2, 0, 1, 5, 2)\right)$ est de dimension 2.
3. f est injective, mais pas surjective.

Exercice 5 (★★). Déterminer une application linéaire u de sorte que l'ensemble F soit le noyau de u :

1. $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{t \mapsto C \mid C \in \mathbb{R}\}$ (ensemble des fonctions constantes)
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in E | x = 2y\}$
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in E | P'(1) = 0 \text{ et } P(2) = P''(0)\}$
4. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, F est l'ensemble des suites géométriques de raison 3

Résultat attendu : Les fonctions proposées sont des exemples, d'autres peuvent également convenir.

1. $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f - f(0) \end{array}$
2. $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x - 2y \end{array}$
3. $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P'(1), P(2) - P''(0)) \end{array}$
4. $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n) & \mapsto & (u_{n+1} - 3u_n) \end{array}$

Exercice 6 (★). On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y, 0, z).$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
2. Montrer que f est un projecteur, dont on précisera les caractéristiques.

Résultat attendu :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0))$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$, et ces familles génératrices sont des bases.
2. f est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0))$.

Exercice 7 (★). Soit $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.
Montrer que φ_A est une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Résultat attendu : $\mathrm{Ker}(\varphi_A - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{Ker}(\varphi_A + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et φ_A est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(\varphi_A - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi_A + \mathrm{id})$.

Exercice 8 (★). On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | a - b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Calculer le projeté d'un vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Résultat attendu :

1. Le plus simple au vu de la suite est de raisonner par analyse-synthèse.
2. Le projeté de (a,b,c) sur F parallèlement à G est $(b-c, -a+2b-c, -a+b)$.

Exercice 9 (★★). On fixe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ égal au reste dans la division euclidienne de P par Q.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur et expliciter ses noyau et image.

Résultat attendu :

1. On utilise le théorème de division euclidienne, en faisant bien attention au degré du reste.
2. Les conditions sur le degré donnent $f \circ f = f$. $\mathrm{Ker}(f) = \{S(X)Q(X) | S(X) \in \mathbb{R}[X]\}$, et si $n = \deg(Q)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (un antécédent d'un polynôme P étant alors lui-même).