Applications des nombres complexes

Exercice 1 (★). Sans faire le moindre calcul, déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z = 1$ 2. $z = -1$ 3. $z = 5$ 4. $z = -5$ 5. $z = i$ 6. $z = 2i$ 7. $z = -5i$ 8. $z = 7e^{i\frac{\pi}{5}}$

Exercice 2 (★). Déterminer les racines carrées de $1 + i$:

1. en utilisant la forme trigonométrique de $1 + i$;
2. puis en utilisant la forme algébrique (chercher les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a + ib)^2 = 1 + i$).

Exercice 3 (★). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (i + 3)z + 2 - 2i = 0$.

Exercice 4 (★). Donner toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = i$. Combien y en a-t-il de différentes ? Montrer que leur somme fait 0.

Exercice 5 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(i + z)^n = (i - z)^n$.

Exercice 6 (★★). Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère l'équation $(z + i)^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que cette équation admet exactement n solutions, qu'on notera z_k avec $k \in [\![0, n - 1]\!]$.
2. Calculer la somme de ces solutions.
3. A l'aide d'une factorisation de type "angle milieu", déterminer $|z_k|$, pour tout $k \in [\![0, n - 1]\!]$.

Exercice 7 (★★). Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

1. Résoudre l'équation $e^{iz} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\cos(z) = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 8 (★). On considère le nombre complexe $z = 1 + 2i$. Quelle est son image par :

1. La translation de vecteur $1 - i$?
2. La rotation de centre $3i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?
3. L'homothétie de centre $-1 + i$ et de rapport 3 ?