Applications des nombres complexes

Exercice 1 (★). Sans faire le moindre calcul, déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z = 1$ 2. $z = -1$ 3. $z = 5$ 4. $z = -5$ 5. $z = i$ 6. $z = 2i$ 7. $z = -5i$ 8. $z = 7e^{i\frac{\pi}{5}}$

Résultat attendu :

1. ± 1 2. $\pm i$ 3. $\pm\sqrt{5}$ 4. $\pm i\sqrt{5}$ 5. $\pm e^{i\frac{\pi}{4}}$ 6. $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ 7. $\pm\sqrt{5}ie^{i\frac{\pi}{4}}$ 8. $\pm\sqrt{7}e^{i\frac{\pi}{10}}$

Exercice 2 (★). Déterminer les racines carrées de $1+i$:

1. en utilisant la forme trigonométrique de $1+i$;
2. puis en utilisant la forme algébrique (chercher les $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(a+ib)^2 = 1+i$).

Résultat attendu :

1. Les racines carrées sont $\pm\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$.
2. Les racines carrées sont $\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Exercice 3 (★). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0$.
Résultat attendu : Les solutions de l'équation sont $-1+i$ et $2i$.

Exercice 4 (★). Donner toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = i$. Combien y en a-t-il de différentes ? Montrer que leur somme fait 0.
Résultat attendu : Il y a cinq solutions différentes, l'ensemble des solutions étant $\left\{e^{i\frac{\pi}{10}} \times e^{\frac{2ik\pi}{5}} | k \in [\![0,4]\!]\right\}$. Le calcul de somme se fait ensuite au choix en se ramenant aux racines 5-ièmes de l'unité ou en utilisant les propriétés des sommes géométriques.

Exercice 5 (★★). Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(i+z)^n = (i-z)^n$.
Résultat attendu : Sous forme simplifiée, l'ensemble des solutions est $\left\{-\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \middle| k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$.

Exercice 6 (★★). Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère l'équation $(z+i)^n = 1$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que cette équation admet exactement n solutions, qu'on notera z_k avec $k\in[\![0,n-1]\!]$.
2. Calculer la somme de ces solutions.
3. A l'aide d'une factorisation de type "angle milieu", déterminer $|z_k|$, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Résultat attendu :

1. Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, on pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - i$.
2. La somme vaut $-ni$.
3. Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, $|z_k| = 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Exercice 7 (★★). Pour $z\in\mathbb{C}$ on pose $\cos(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

1. Résoudre l'équation $e^{iz} = 1$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\cos(z) = 1$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Résultat attendu :

1. Le calcul se fait en utilisant la forme algébrique de z. L'ensemble des solutions est $\{2k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$.
2. On se ramène par calcul à la question précédente, l'ensemble des solutions est donc $\{2k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 8 (★). On considère le nombre complexe $z = 1+2i$. Quelle est son image par :

1. La translation de vecteur $1-i$?
2. La rotation de centre $3i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?
3. L'homothétie de centre $-1+i$ et de rapport 3 ?

Résultat attendu :

1. L'image est $2+i$.
2. L'image est $\sqrt{2}+3i$.
3. L'image est $5+4i$.