Exercices: Applications linéaires en dimension finie

Exercice 1. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$, et λ un nombre réel. Soit φ l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) & = & e_1 + \lambda e_3 \end{array}\right.$$

Soit $v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, déterminer $\varphi(v)$. Comment choisir λ pour que φ soit injective ? surjective ?

Exercice 2. Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u((x, y, z, t)) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?
3. En déduire que u est surjective.

Exercice 3. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\forall P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$f(P(X)) = (P(-1), P(0), P(1)).$$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit f l'application définie sur E par $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
2. Pour $k \leqslant n$, calculer $f(X^k)$. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de $\mathrm{Im}(f)$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de E tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P(X)) = P(X) + (1 - X)P'(X).$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), \qquad v = (1, -1, 3), \qquad w = (3, 3, -5).$$

On note F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w).

1. Déterminer une base de F.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie pour des réels α, β, γ par

   $$f((\alpha, \beta, \gamma)) = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. Préciser le rang de f.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?
5. Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\mathrm{Im}(f)$?
6. Déterminer une base et la dimension de $F \cap \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par $f(P(X)) = \displaystyle\int_0^1 P(t)dt$.

1. Vérifier que f est une forme linéaire, et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 8. Soient $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ deux entiers. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$ est une famille libre alors $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une famille libre.

Exercice 9. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = 0$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(u).$$

En déduire que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$.