ECS1 # Exercices: Applications linéaires et matrices

**Exercice 1.** Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f((x,y,z)) = (x+z, 4x-2y+z)$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Notons la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et celle de $\mathbb{R}^2$ par $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$.

1. Donner la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
2. Posons $v_1 = e_1 + e_2 + e_3, v_2 = e_1 + 2e_2 + 4e_3$ et $v_3 = e_1 + 3e_2 + 9e_3$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Posons $w_1 = f_1 + f_2$ et $w_2 = f_2$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{C}' = (w_1, w_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Exprimer la matrice de $f$ dans les base $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

**Exercice 2.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, \qquad f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, \qquad f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3,$$

où $(e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de $f$ dans la base canonique.
2. Posons $v_1 = 2e_1 + 3e_2, v_2 = 3e_2 - 2e_3$ et $v_3 = 2e_1 + 2e_2 + e_3$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Exprimer l'image de $\mathcal{B}$ par $f$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Exercice 3.** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. On pose,

$$f_3 = (-1, 1, 1), \quad f_2 = u(f_3) - f_3 \text{ et } f_1 = u(f_2) - f_2.$$

1. Calculer les coordonnées de $f_2$ et $f_1$ dans la base canonique.
2. Vérifier que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice $N$ de $u$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Exercice 4.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $A^3$ en fonction de $A$ et $I_3$.
2. En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

**Exercice 5.** On considère $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de $f$.
2. $f$ est-elle bijective ? Si oui, déterminer sa réciproque.

**Exercice 6.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme $P$ tel que $P(A) = 0$. En déduire $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 7.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 8.** Soit $t \in \mathbb{C}^*$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer un polynôme annulateur de cette matrice.
2. En utilisant le théorème de division euclidienne, calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 9.** Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $\mathbb{R}^m$ telle que $(e_{r+1}, \ldots, e_m)$ est une base du noyau de $f$, pour un entier $r \in \{0, \ldots, m\}$.
2. Vérifier que $(f(e_1), \ldots, f(e_r))$ est une base de l'image de $f$.
3. En déduire qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^n$, respectivement, dont la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 10.** Donner des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ comme dans l'exercice précédent pour l'application $u$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f((x,y,z,w)) = (x + z + w, -x + y - 2w, -y - z + w).$$