Exercices: Applications linéaires

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y+z) \end{array}$
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x^2,y^2,z^2) \end{array}$
4. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$

Exercice 2. Soit a un réel. Parmi les applications suivantes, déterminer (éventuellement en fonction des valeurs de a) celles qui sont linéaires :

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,a) \end{array}$
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (ax,ay) \end{array}$
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+a,y+a) \end{array}$

Exercice 3. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

1. $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & {}^tXX \end{array}$
2. $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X\,{}^tX \end{array}$
3. $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X - X \end{array}$

Exercice 4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^5$ définie pour tous α,β réels par

$$f((\alpha,\beta)) = (\alpha+2\beta,\alpha,\alpha+\beta,3\alpha+5\beta,-\alpha+2\beta).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et préciser sa dimension.
4. f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 5. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$ définie pour tous α,β,γ réels par

$$f[(\alpha,\beta,\gamma)] = (\alpha+2\beta+\gamma,\alpha+\gamma,\alpha+\beta,3\alpha+5\beta,-\alpha+2\beta+3\gamma).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et préciser sa dimension.
4. f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P(X)) = P(X) + (1-X)P'(X).$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 7. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Quand la réponse est oui, sont-elles surjectives, injectives ? Déterminer leur image et leur noyau.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+i) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X^2) \end{array} \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f((x,y,z)) = \left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right).$$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que la juxtaposition de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ donne une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. On considère $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3.$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que f est un projecteur, dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 10. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | a-b+c=0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Calculer le projeté d'un vecteur (a,b,c) sur F parallèlement à G.