Applications

Exercice 1 (★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+y) \end{array}$.

1. Déterminer les images par f de $A = (-1,0)$ et $B = (1,2)$.
2. Déterminer les images par g de $F = (2,0,1)$ et $G = (-3,1,2)$.
3. Déterminer les antécédents par f de F et G.
4. Déterminer les antécédents par g de A et B.
5. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
6. Définir les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 (★). Les applications suivantes sont-elles bien définies ? injectives ? surjectives ?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \{-1,1\} & \to & \mathbb{Z} \\ (a,s) & \mapsto & s \times a \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{Q} \\ (a,b) & \mapsto & \dfrac{a}{b} \end{array}$

Exercice 3 (★★). Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que f est bijective pour un ensemble J à déterminer. Expliciter ensuite sa réciproque f^{-1}.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ t & \mapsto & 1+e^t \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ s & \mapsto & \dfrac{-1}{2}s - 1 \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ t & \mapsto & t+t^2 \end{array}$

Exercice 4 (★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$. La fonction f est-elle bijective ? Si oui, définir f^{-1}.

Exercice 5 (★★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 6 (★★). On pose la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2}+1 \end{array}$.

Note : ici, e^{x^2} désigne le nombre $\exp(x^2)$ *et pas* $(\exp(x))^2$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J. On explicitera les applications réciproques de ces deux bijections.

Exercice 7 (★★). Soit a une application définie de E dans F et b une application définie de F dans G.

1. Prouver que : $b \circ a$ injective sur $E \Longrightarrow a$ injective sur E.
2. Prouver que : $b \circ a$ surjective de E dans $G \Longrightarrow b$ surjective de F dans G.