Applications

Exercice 1 (★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+y) \end{array}$.

1. Déterminer les images par f de $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 2)$.
2. Déterminer les images par g de $F = (2, 0, 1)$ et $G = (-3, 1, 2)$.
3. Déterminer les antécédents par f de F et G.
4. Déterminer les antécédents par g de A et B.
5. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
6. Définir les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Résultat attendu :

1. $f(A) = (-1, -1, -1)$, $f(B) = (3, -1, 1)$.
2. $g(F) = (3, 2)$, $g(G) = (0, -2)$.
3. F a pour antécédent $(1, 1)$. G n'a pas d'antécédent.
4. L'ensemble des antécédents de A est $\{(x, -x, -1) | x \in \mathbb{R}\} = \{(-y, y, -1) | y \in \mathbb{R}\}$.
   L'ensemble des antécédents de B est $\{(x, 2-x, -1) | x \in \mathbb{R}\} = \{(2-y, y, -1) | y \in \mathbb{R}\}$.
5. f est injective, mais pas surjective. g est surjective mais pas injective.
6. $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y+z, z, x+y+z) \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x, 2x) \end{array}$

Exercice 2 (★). Les applications suivantes sont-elles bien définies ? injectives ? surjectives ?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \{-1, 1\} & \to & \mathbb{Z} \\ (a,s) & \mapsto & s \times a \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{Q} \\ (a,b) & \mapsto & \frac{a}{b} \end{array}$

Résultat attendu :

1. f_1 n'est pas bien définie.
2. f_2 est bien définie, injective et surjective.
3. f_3 est bien définie, injective, pas surjective.
4. f_4 est bien définie, injective, pas surjective.
5. f_5 est bien définie, pas injective, surjective.
6. f_6 est bien définie, pas injective, surjective.

Exercice 3 (★★). Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que f est bijective pour un ensemble J à déterminer. Expliciter ensuite sa réciproque f^{-1}.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ t & \mapsto & 1+e^t \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ s & \mapsto & \frac{-1}{2}s - 1 \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ t & \mapsto & t+t^2 \end{array}$

Résultat attendu :

1. $J =]1, +\infty[$, $f^{-1} : y \mapsto \ln(y-1)$.
2. $J = \mathbb{R}$, $f^{-1} : y \mapsto -2(y+1)$.
3. $J =]0, 1]$, $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$.
4. $J = [0, +\infty[$, $f^{-1} : y \mapsto \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$.

Exercice 4 (★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$. La fonction f est-elle bijective ? Si oui, définir f^{-1}.

Résultat attendu : f est bijective et $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{x+y}{3}, \frac{x-2y}{3}\right) \end{array}$.

Exercice 5 (★★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1, 1[\\ x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Résultat attendu : f est bijective et $f^{-1} : y \mapsto \frac{y}{1-|y|}$.

Exercice 6 (★★). On pose la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2}+1 \end{array}$.

Note : ici, e^{x^2} désigne le nombre $\exp(x^2)$ et pas $(\exp(x))^2$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J. On explicitera les applications réciproques de ces deux bijections.

Résultat attendu : $J = [2, +\infty[$. Les deux réciproques sont $\begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \sqrt{\ln(y-1)} \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R}_- \\ y & \mapsto & -\sqrt{\ln(y-1)} \end{array}$.

Exercice 7 (★★). Soit a une application définie de E dans F et b une application définie de F dans G.

1. Prouver que : $b \circ a$ injective sur $E \Longrightarrow a$ injective sur E.
2. Prouver que : $b \circ a$ surjective de E dans $G \Longrightarrow b$ surjective de F dans G.

Résultat attendu : On suppose que le membre de gauche de l'implication est vérifié, et on montre que le membre de droite est également vérifié en revenant à la définition d'injectif ou surjectif.