Exercices PCSI
É.Bouchet

Calcul de primitives

Exercice 1 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2t^2-3)dt$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{x}(2s+1)^4 ds$
3. $\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{dt}{(2t+1)^4}$
4. $\displaystyle\int_{x}^{2}\sqrt{u+1}du$
5. $\displaystyle\int_{2x}^{x^2}2s(s^2+1)^3 ds$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)\sin^5(2t)dt$
7. $\displaystyle\int_{1}^{1+2x}\frac{\ln u}{u}du$

Exercice 2 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-x}^{x}\sin(3t)dt$
2. $\displaystyle\int_{x^2}^{1}\cos\left(\frac{s-1}{2}\right)ds$
3. $\displaystyle\int_{0}^{x}\cos^2(t)dt$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{5}}\sin^2(5u)du$
5. $\displaystyle\int_{-x^2}^{2x^2}e^{3t}dt$
6. $\displaystyle\int_{0}^{1}e^{(2i-5)t}dt$
7. $\displaystyle\int_{1}^{x}se^{2s^2}ds$

Exercice 3 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{3}^{x}\frac{1}{t+2}dt$
2. $\displaystyle\int_{-5}^{x}\frac{1}{t+2}dt$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{1}{3-2s}ds$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2u+1}{1+u+u^2}du$
5. $\displaystyle\int_{0}^{3x}\tan(t)dt$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{3t}{\sqrt{2t^2+1}}dt$
7. $\displaystyle\int_{x-1}^{x+1}\frac{1}{e^s\sqrt{2e^{-s}+1}}ds$

Exercice 4 (★). Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \cos(t)e^{-t}$
2. $f_2 : t \mapsto \sin(2t)e^{t}$
3. $f_3 : t \mapsto \sin^2(t)e^{t}$

Exercice 5 (★). En procédant par intégration par parties, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto t\sin(t)$
2. $f_2 : t \mapsto t\ln(t)$
3. $f_3 : t \mapsto t^2e^{-t}$
4. $f_4 : t \mapsto \arctan(t)$
5. $f_5 : t \mapsto t\arctan(t)$
6. $f_6 : t \mapsto t\sin(t)\cos(2t)$

Exercice 6 (★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^4}$
2. $f_2 : t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}$
3. $f_3 : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$
4. $f_4 : t \mapsto \dfrac{\sin(t)\cos(t)}{\sin^2(t)+1}$

Exercice 7 (★★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $g_1 : t \mapsto \dfrac{e^t-1}{e^t+1}$
2. $g_2 : t \mapsto \dfrac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$
3. $g_3 : t \mapsto \arcsin^2(t)$

Indication : pour g_2, poser $t = \sin(s)$.

Exercice 8 (★). Déterminer une primitive (intervalle(s) de validité à préciser) de :

1. $f : t \mapsto \dfrac{1}{2t+1}$
2. $g : t \mapsto \dfrac{2t}{2t+1}$
3. $h : t \mapsto \dfrac{3t+1}{2t+1}$
4. $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t^2-2t-3}$
5. $\psi : t \mapsto \dfrac{1}{2t^2-3t-2}$
6. $\mu : t \mapsto \dfrac{1}{4t^2+4t+1}$
7. $u : t \mapsto \dfrac{1}{t^2-4t+5}$
8. $v : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$.

Exercice 9 (★★). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition les intégrales suivantes sont-elles définies, et que valent-elles ?

1. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(1-pt)\sin(pt)dt$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{x}(t+x)^p dt$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^{2s}}{e^s+1}ds$
4. $\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{ds}{\sqrt{1-as}}$
5. $\displaystyle\int_{0}^{e^p}\ln(1+r^2)dr$
6. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dt}{t+t\ln(t)}$
7. $\displaystyle\int_{-a}^{2a}t\sqrt{p-t^2}dt$
8. $\displaystyle\int_{1}^{x}\frac{\ln(au)}{\sqrt{2u}}du$
9. $\displaystyle\int_{0}^{x^2}\frac{ds}{s^2-p^2}$
10. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)e^{a\sin(t)}dt$

Exercice 10 (★★). On pose, pour tout $x > 0$, $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$. Justifier que G est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer l'expression de sa dérivée, et ses variations.
Indication : inutile de calculer une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$.

Exercice 11 (★). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est impaire sur $[-a, a]$, que peut-on dire de $\int_{-a}^{a} f(x)dx$? Prouvez-le.
2. Même question si f est paire.
3. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que peut-on dire de $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$? Prouvez-le.

Exercice 12 (★★). On définit pour tout p et q entiers naturels l'intégrale $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Justifier l'existence de $I_{p,q}$. Si $q \neq 0$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$.
2. Montrer par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ la propriété $H(q)$: « $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ ».
3. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{2p+1} \cos(x)^{2q+1} dx$.