# Calcul de primitives

**Exercice 1 (★).** Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2t^2 - 3)dt$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{x} (2s+1)^4 ds$
3. $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{dt}{(2t+1)^4}$
4. $\displaystyle\int_{x}^{2} \sqrt{u+1}du$
5. $\displaystyle\int_{2x}^{x^2} 2s(s^2+1)^3 ds$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\sin^5(2t)dt$
7. $\displaystyle\int_{1}^{1+2x} \frac{\ln u}{u} du$

**Résultat attendu :** La justification d'existence se fait par étude de la continuité.

1. $\dfrac{-14}{3}$
2. $\dfrac{(2x+1)^5+1}{10}$
3. $\dfrac{1}{6}\left(1 - \dfrac{1}{(2x+1)^3}\right)$ (si $x \in ]-\frac{1}{2}, +\infty[$)
4. $\dfrac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}}\right)$ (si $x \in [-1, +\infty[$)
5. $\dfrac{(x^4+1)^4 - (4x^2+1)^4}{4}$
6. $0$
7. $\dfrac{(\ln(1+2x))^2}{2}$ (si $x \in ]-\frac{1}{2}, +\infty[$)

**Exercice 2 (★).** Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-x}^{x} \sin(3t)dt$
2. $\displaystyle\int_{x^2}^{1} \cos\left(\frac{s-1}{2}\right) ds$
3. $\displaystyle\int_{0}^{x} \cos^2(t)dt$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{5}} \sin^2(5u)du$
5. $\displaystyle\int_{-x^2}^{2x^2} e^{3t}dt$
6. $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{(2i-5)t}dt$
7. $\displaystyle\int_{1}^{x} se^{2s^2}ds$

**Résultat attendu :** La justification d'existence se fait par étude de la continuité.

1. $0$
2. $-2\sin\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right)$
3. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4}$
4. $\dfrac{\pi}{10}$
5. $\dfrac{e^{6x^2} - e^{-3x^2}}{3}$
6. $\dfrac{(1-e^{2i-5})(5+2i)}{29}$
7. $\dfrac{e^{2x^2} - e^2}{4}$

**Exercice 3 (★).** Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{3}^{x} \frac{1}{t+2}dt$
2. $\displaystyle\int_{-5}^{x} \frac{1}{t+2}dt$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{1}{3-2s}ds$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2u+1}{1+u+u^2}du$
5. $\displaystyle\int_{0}^{3x} \tan(t)dt$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3t}{\sqrt{2t^2+1}}dt$
7. $\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{e^s\sqrt{2e^{-s}+1}}ds$

**Résultat attendu :** La justification d'existence se fait par étude de la continuité.

1. $\ln(x+2) - \ln(5)$ (si $x \in ]-2, +\infty[$)
2. $\ln(-x-2) - \ln(3)$ (si $x \in ]-\infty, -2[$)
3. $\ln\left(\sqrt{\dfrac{5}{3-2x}}\right)$ (si $x \in ]-\infty, \frac{3}{2}[$)
4. $\ln(3)$
5. $-\ln(\cos(3x))$ (si $x \in ]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$)
6. $\dfrac{3}{2}(1-\sqrt{3})$
7. $\sqrt{2e^{-x+1}+1} - \sqrt{2e^{-x-1}+1}$

**Exercice 4 (★).** Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \cos(t)e^{-t}$
2. $f_2 : t \mapsto \sin(2t)e^{t}$
3. $f_3 : t \mapsto \sin^2(t)e^{t}$

**Résultat attendu :**

1. $\forall t \in \mathbb{R},\ F_1(t) = \dfrac{e^{-t}}{2}(\sin(t) - \cos(t))$
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ F_2(t) = \dfrac{e^{t}}{5}(\sin(2t) - 2\cos(2t))$
3. $\forall t \in \mathbb{R},\ F_3(t) = \dfrac{e^{t}}{2} - \dfrac{e^{t}}{10}(\cos(2t) + 2\sin(2t))$

**Exercice 5 (★).** En procédant par intégration par parties, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto t\sin(t)$
2. $f_2 : t \mapsto t\ln(t)$
3. $f_3 : t \mapsto t^2e^{-t}$
4. $f_4 : t \mapsto \arctan(t)$
5. $f_5 : t \mapsto t\arctan(t)$
6. $f_6 : t \mapsto t\sin(t)\cos(2t)$

**Résultat attendu :**

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_1(x) = \sin(x) - x\cos(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F_2(x) = \ln(x)\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_3(x) = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2)$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_4(x) = x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_5(x) = \dfrac{x^2\arctan(x) - x + \arctan(x)}{2}$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_6(x) = \dfrac{x\cos(x)}{2} - \dfrac{x\cos(3x)}{6} + \dfrac{\sin(3x)}{18} - \dfrac{\sin(x)}{2}$

**Exercice 6 (★).** En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^4}$
2. $f_2 : t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}$
3. $f_3 : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$
4. $f_4 : t \mapsto \dfrac{\sin(t)\cos(t)}{\sin^2(t)+1}$

**Résultat attendu :**

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_1(x) = \arctan(x^2)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_2(x) = e^x - \ln(1+e^x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_3(x) = 2\arctan(e^x)$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_4(x) = \dfrac{\ln(\sin^2(x)+1)}{2}$

**Exercice 7 (★★).** En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $g_1 : t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{e^t + 1}$
2. $g_2 : t \mapsto \dfrac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$
3. $g_3 : t \mapsto \arcsin^2(t)$

*Indication : pour $g_2$, poser $t = \sin(s)$.*

**Résultat attendu :**

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = 2\ln(e^x+1) - \ln(e^x)$
2. $\forall x \in ]-1,1[,\ G_2(x) = \tan(\arcsin(x)) + \arcsin(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin(x)$
3. $\forall x \in [-1,1],\ G_3(x) = x\arcsin(x) + 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 2x$

**Exercice 8 (★).** Déterminer une primitive (intervalle(s) de validité à préciser) de :

1. $f : t \mapsto \dfrac{1}{2t+1}$
2. $g : t \mapsto \dfrac{2t}{2t+1}$
3. $h : t \mapsto \dfrac{3t+1}{2t+1}$
4. $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t^2-2t-3}$
5. $\psi : t \mapsto \dfrac{1}{2t^2-3t-2}$
6. $\mu : t \mapsto \dfrac{1}{4t^2+4t+1}$
7. $u : t \mapsto \dfrac{1}{t^2-4t+5}$
8. $v : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$.

**Résultat attendu :**

1. $\forall x \in ]-\infty,-\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in ]-\frac{1}{2},+\infty[,\ F(x) = \dfrac{\ln(|2x+1|)}{2}$.
2. $\forall x \in ]-\infty,-\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in ]-\frac{1}{2},+\infty[,\ G(x) = x - \dfrac{\ln(|2x+1|)}{2}$.
3. $\forall x \in ]-\infty,-\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in ]-\frac{1}{2},+\infty[,\ H(x) = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{\ln(|4x+2|)}{4}$.
4. $\forall x \in ]-\infty,-1[$ ou $\forall x \in ]-1,3[$ ou $\forall x \in ]3,+\infty[,\ \Phi(x) = \dfrac{\ln(|x-3|)}{4} - \dfrac{\ln(|x+1|)}{4}$.
5. $\forall x \in ]-\infty,-\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in ]-\frac{1}{2},2[$ ou $\forall x \in ]2,+\infty[,\ \Psi(x) = \dfrac{\ln(|t-2|)}{5} - \dfrac{\ln(\left|t+\frac{1}{2}\right|)}{5}$.
6. $\forall x \in ]-\infty,-\frac{1}{2}[$ ou $\forall x \in ]-\frac{1}{2},+\infty[,\ M(x) = -\dfrac{1}{4x+2}$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ U(x) = \arctan(x-2)$.
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ V(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2(t+1)}{\sqrt{3}}\right)$.

**Exercice 9 (★★).** Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition les intégrales suivantes sont-elles définies, et que valent-elles ?

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}(1-pt)\sin(pt)dt$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{x}(t+x)^p dt$
3. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{e^{2s}}{e^s+1}ds$
4. $\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{ds}{\sqrt{1-as}}$
5. $\displaystyle\int_0^{e^p}\ln(1+r^2)dr$
6. $\displaystyle\int_1^{2}\frac{dt}{t+t\ln(t)}$
7. $\displaystyle\int_{-a}^{2a}t\sqrt{p-t^2}dt$
8. $\displaystyle\int_1^{x}\frac{\ln(au)}{\sqrt{2u}}du$
9. $\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{ds}{s^2-p^2}$
10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)e^{a\sin(t)}dt$

**Résultat attendu :**

1. $\displaystyle\frac{1-(1-p\pi)\cos(p\pi)-\sin(p\pi)}{p}$
2. $(2x)^{p+1}-(x-1)^{p+1}$
3. $e-1-\ln(e+1)+\ln(2)$
4. $\displaystyle-\frac{2}{a}\left(\sqrt{1-ax}-\sqrt{1+ax}\right)$ (il faut $ax\in[-1,1]$)
5. $e^p\ln(1+e^{2p})-2e^p+2\arctan(e^p)$
6. $\ln(1+\ln(2))$
7. $\displaystyle\frac{(\sqrt{p-a^2})^3-(\sqrt{p-4a^2})^3}{2}$ (il faut $p\geqslant 4a^2$)
8. $\ln(ax)\sqrt{x}-\ln(a)-2\sqrt{x}+2$ (il faut $x>0$)
9. $\displaystyle\frac{1}{2p}\ln\left(\left|\frac{x^2-p}{x^2+p}\right|\right)$ (il faut $x^4\neq p^2$)
10. $\displaystyle\frac{2}{a}\left(e^a-\frac{e^a}{a}+\frac{1}{a}\right)$

**Exercice 10 (★★).** On pose, pour tout $x>0$, $G(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$. Justifier que $G$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer l'expression de sa dérivée, et ses variations.

*Indication : inutile de calculer une primitive de $t\mapsto\dfrac{e^t}{t}$.*

**Résultat attendu :** $\forall x>0$, $G'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)}{x}\geqslant 0$. Donc $G$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 11 (★).** Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Si $f$ est impaire sur $[-a,a]$, que peut-on dire de $\int_{-a}^{a}f(x)dx$ ? Prouvez-le.
2. Même question si $f$ est paire.
3. Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$. Si $f$ est $T$-périodique sur $\mathbb{R}$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, que peut-on dire de $\int_{a+T}^{b+T}f(t)dt$ ? Prouvez-le.

**Résultat attendu :** Des changements de variables judicieux donnent :

1. $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$
2. $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^{a}f(t)dt$
3. $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T}f(t)dt=\int_a^{b}f(t)dt$

**Exercice 12 (★★).** On définit pour tout $p$ et $q$ entiers naturels l'intégrale $I_{p,q}=\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Justifier l'existence de $I_{p,q}$. Si $q\neq 0$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$.
2. Montrer par récurrence sur $q\in\mathbb{N}$ la propriété $H(q)$ : « $\forall p\in\mathbb{N}$, $I_{p,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ ».
3. En déduire la valeur de l'intégrale $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^{2p+1}\cos(x)^{2q+1}dx$.

**Résultat attendu :**

1. Une intégration par parties donne $I_{p,q}=\dfrac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$.
2. On rédige la récurrence en utilisant la relation de la question précédente.
3. Le changement de variable $u=\sin(x)^2$ et la question précédente donnent $J=\dfrac{p!q!}{2(p+q+1)!}$.