Exercices: Convergence des suites réelles

Exercice 1. Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2. $b_n = \ln n - n^2$
3. $c_n = 2^n - n$
4. $d_n = n^{\frac{1}{n}}$
5. $e_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $f_n = \ln n + (-1)^n$
7. $g_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour x un réel fixé.

Exercice 2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \quad \text{et} \quad u_0 = 2013.$$

Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier n non nul par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.

Exercice 4. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier n non nul par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3+k^3}.$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 1$
2. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par pour tout n entier par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{2^k}{k!} \leqslant 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \leqslant 9$.

Exercice 7. On pose pour tout entier $n \geqslant 2$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Calculer S_n pour tout $n \geqslant 2$.
2. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 8. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout n entier non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Montrer que pour tout n non nul, $u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9. Pour tout entier n non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

1. Montrez que u et v sont deux suites adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
   On note γ la limite de u (Ce réel est appelé la constante d'Euler).
2. A partir de quel entier est-on assuré que u_n est une approximation de γ à 10^{-3} près ?

Exercice 10. Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

Indication : on pourra commencer par étudier les suites (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}).

Exercice 11. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \qquad 0 < v_0 < u_0.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < u_n$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Étudier la nature de la suite de terme général $w_n = u_n v_n$. En déduire la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit les suites (q_n) et (p_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor \text{ et } p_n = q_n + 10^{-n}.$$

1. En utilisant la définition de la partie entière, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \leqslant x \leqslant p_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Donner le meilleur encadrement possible de $10^{n+1}x$ en fonction de $\lfloor 10^n x \rfloor$.
   (b) En déduire les signes de $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor$ et de $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor - 9$.
   (c) Montrer que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes.
3. En utilisant les questions précédentes, étudier la convergence de (q_n) et donner sa limite.