ECS1 # Exercices: Convergence des variables aléatoires

Exercice 1. On lance n fois un dé honnête à six faces. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, déterminer un minorant des valeurs de n pour lesquelles on a plus d'une chance sur deux d'obtenir une fréquence d'apparition de la valeur 1 qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur théorique $\frac{1}{6}$.

Exercice 2. Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heures. Déterminer un entier N tel que si l'entreprise a N lignes de téléphone, la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant est au plus égale à $0,25$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Montrer que $P(X \geqslant \lambda^2) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.
2. (a) Montrer que $[X \leqslant \frac{\lambda}{2}] \subset [|X-\lambda| \geqslant \frac{\lambda}{2}]$.
   (b) En déduire que $P\left(X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda}$.

Exercice 4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, montrer que, pour tout n entier, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geqslant \frac{n-1}{n} 2^{4n}.$$

Exercice 5. Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ X_n une variable aléatoire telle que $X_n(\Omega) = \{0; n^c\}$ et $P(X_n = n^c) = \frac{1}{n}$.

1. Montrer que (X_n) converge en probabilités vers la variable aléatoire constante égale à 0.
2. Déterminer, selon la valeur de c, $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Exercice 6.

1. Soit une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.
   On suppose que la suite (X_n) converge complètement vers X, c'est à dire que, pour tout réel ε strictement positif, la série de terme général $P\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right)$ est convergente. Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X.
2. On se propose dans cette question d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse. Pour ce faire, on considère une suite $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{1}{n}$.
   (a) Déterminer la probabilité $P(Y_n \geqslant 1)$.
   (b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leqslant P\left(Y_n \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.
   (c) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.
   (d) Utiliser la valeur de $P(Y_n \geqslant 1)$ pour en déduire que la suite (Y_n) ne converge pas complètement vers la variable certaine nulle.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ existent. On suppose, en outre, qu'il existe un réel m tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = m \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} V(X_n) = 0.$$

1. Montrer que $E((X_n - m)^2) = V(X_n) + (E(X_n) - m)^2$.
2. Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on a :
   $$P(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}(V(X_n) + (E(X_n) - m)^2).$$
3. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On lance n fois une pièce non équilibrée avec laquelle la probabilité d'obtenir « pile » lors d'un jet est p. Soit S_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de « pile » obtenus. Enfin, Y_n est la variable aléatoire définie par : $Y_n = e^{\frac{S_n}{n}}$.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.
   (b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Exercice 8.

1. On considère une suite de variables aléatoires (X_n) telle que X_n suit la loi uniforme sur $\left[0; \frac{1}{n}\right]$. Cette suite converge-t-elle en loi ?
2. On considère maintenant une suite de variables aléatoires (X_n) telle que X_n suit la loi uniforme sur $[0; n]$. Converge-t-elle en loi ?
3. On considère maintenant une suite de variables aléatoires (X_n) telle que X_n suit la loi uniforme sur $[0; n]$. La suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ converge-t-elle en loi ?

Exercice 9. Soit n un entier non nul et a un réel. On considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{an}{\pi(1+n^2x^2)}$.

1. Déterminer a pour que f_n soit une densité d'une variable X_n.
2. Étudier l'espérance de X_n.
3. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

Exercice 10.

1. Soit a un réel de l'intervalle $[0, 1[$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} \lambda(1 - ax^{1-a}) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   (a) Déterminer, en fonction de a, la valeur du réel λ pour laquelle f_a est une densité de probabilité. On suppose dans la suite que λ est ainsi choisi.

   (b) Soit Y_a une variable aléatoire admettant f_a comme densité. Déterminer la fonction de répartition de Y_a.

2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n non nul, une densité de Y_n est $f_{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ (c'est-à-dire que $a = 1 - \frac{1}{n}$).

   (a) Soit F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer, pour tout réel x, la limite lorsque n tend vers l'infini de $F_n(x)$.

   (b) Y a-t-il convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 11. Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. À un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t fixé. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
2. On pose $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$. Justifier précisément qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à $2,5\%$. En utilisant l'approximation précédente, proposer un calcul qui donnerait une valeur approchée de ce nombre de connexions. On admettra que $\sqrt{2} \simeq 1,4$ et que si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, $P(Z \geqslant 1,96) = 0,025$.