Exercices: Développements limités

Exercice 1. Déterminer les développements limités en 0 de :

1. $\dfrac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 2.
2. $(\sin x)^2$ à l'ordre 6.
3. $\dfrac{\cos(x)}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4.

Exercice 2. Donner un développement limité de :

1. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 3 en 0.
2. $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x(1+x)}$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

Exercice 5. Donner un équivalent simple en 0 pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2\exp(x) - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$,
2. $g(x) = \dfrac{\sin(x) - \sqrt{x+1} + (1+2x)^{\frac{1}{3}}}{1+\ln(1+x)-\exp(x)}$,

Exercice 6. (Difficile) Déterminer un équivalent en 0 de $\sqrt{x} - \sqrt{\sin(x)}$.

Exercice 7. Étudier la convergence des séries de terme général

1. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$,
2. $v_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

Exercice 8. On considère, d'une part, la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et d'autre part la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi (on montrera qu'il existe un entier naturel N tel que : si $n \geqslant N$, alors $x_n^2 \leqslant x_n$).
2. (a) Étudier la fonction ch et dresser son tableau de variations.
   (b) Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n est divergente.
5. (a) Montrer que : $v_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.
   (c) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.