Exercices : Dénombrement

Exercice 1. Dans une classe de 36 élèves, tous étudient au moins l'une des langues vivantes suivantes, 22 étudient l'anglais, 22 l'italien et 18 l'espagnol. On sait en outre que 10 étudient à la fois l'anglais et l'italien, que 9 étudient à la fois l'italien et l'espagnol et 11 à la fois l'anglais et l'espagnol. Combien étudient les trois langues ?

Exercice 2. On considère le mot « ABRACADABRANTESQUE ». Combien possède-t-il d'anagrammes ?

Exercice 3. Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. Soit $p \in [\![1, n]\!]$, on tire simultanément p boules dans l'urne. Dénombrer :

1. le nombre de tirages possibles.
2. le nombre de tirages possibles dont le minimum des numéros tirés est k, pour $k \in [\![1, n]\!]$.
3. le nombre de tirages possibles où toutes les boules tirées ont un numéro compris entre i et j, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
4. le nombre de tirages possibles dont le minimum des numéros tirés est k, et le maximum est l, pour $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$.
5. le nombre de tirages possibles où la boule i est tirée, pour $i \in [\![1, n]\!]$.
6. le nombre de tirages possibles où la boule i n'est pas tirée, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 4. On considère un jeu de 32 cartes (il y a donc 8 cartes de chaque « couleur »).

1. De combien de façons peut-on tirer une main de 8 cartes ?
2. Combien de ces mains contiendront exactement 4 cœurs ?
3. Combien de ces mains contiendront exactement 3 valets ?
4. Combien de ces mains contiendront exactement 4 cœurs et 3 valets ?
5. Combien de ces mains contiendront exactement 4 cœurs ou exactement 3 valets ?
6. Combien de ces mains contiendront au moins un cœur ?

Exercice 5. On dispose de 4 pions numérotés de 1 à 4 et de 3 sacs numérotés de 1 à 3. On peut mettre plusieurs pions dans un sac.

1. Combien y-a-t-il de façons de placer les 4 jetons dans les 3 sacs ?
2. On appelle V_i l'ensemble des résultats qui amènent le sac i vide. Calculer $\text{Card}(V_i)$.
3. En déduire le nombre de façons de laisser au moins un sac vide.
4. Combien y-a-t-il de façons de ne laisser aucun sac vide ?

Exercice 6. Soient $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$ deux entiers naturels tels que $n \geqslant p$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue p tirages avec remise.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages où les numéros des boules tirées sont tous distincts ?
3. Quel est le nombre de tirages où au moins deux des boules tirées portent le même numéro ?
4. Quel est le nombre de tirages où exactement deux des boules tirées portent le même numéro ?

Exercice 7. Un facteur arrive dans le hall d'un immeuble. Il doit distribuer 7 prospectus dans 10 boites aux lettres nominatives. De combien de façons peut-il faire dans chacun des cas suivants :

1. Chaque boite peut contenir au plus un prospectus et les prospectus sont distincts.
2. Chaque boite peut contenir au plus un prospectus et les prospectus sont identiques.
3. Chaque boite peut contenir un nombre quelconque de prospectus et les prospectus sont distincts.
4. (difficile) Chaque boite peut contenir un nombre quelconque de prospectus et les prospectus sont identiques.

Exercice 8. On monte un escalier en franchissant à chaque pas, soit une marche, soit deux marches.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p_n le nombre de façons dont on peut enchaîner les pas d'une marche et les pas de deux marches pour gravir un escalier de n marches.
   (a) Déterminer une relation de récurrence liant p_n, p_{n-1} et p_{n-2}.
   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. On appelle k le nombre de pas de deux marches que l'on peut faire pour gravir un escalier de n marches.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles pour k ?
   (b) Calculer en fonction de k le nombre total de pas nécessaires.
   (c) Déterminer le nombre de façons dont on peut opérer en faisant k pas de deux marches.
   (d) En déduire une expression de p_n sous forme d'une somme.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^{k+1}}$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}$.

Exercice 11 (Formule de sommation des colonnes)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $0 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Calculer alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.

Exercice 12 (Formule de sommation des diagonales)**.** Démontrer que si $0 \leqslant p \leqslant n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Exercice 13. Soit $n \geqslant 1$, et f_n la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n}.$$

1. Donner pour tout réel x une expression de $f_n(x)$ sans symbole $\sum$.
2. Dériver f_n sous ces deux formes pour calculer :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k}.$$
3. Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la fonction f_n, en utilisant des formules de dénombrement.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n} \binom{n}{k}$. On pourra écrire $k^2 = k(k-1) + k$.