

**Exercice 1 (★).** On considère le mot « ABRACADABRANTESQUE ». Combien possède-t-il d'anagrammes ?

**Résultat attendu :** Il y a  $\frac{18!}{2!2!2!5!}$  anagrammes.

**Exercice 2 (★).** Combien y a-t-il de nombres à 5 chiffres qui ne contiennent pas le chiffre 9 ?

**Résultat attendu :** Il y a 52 488 choix possibles.

**Exercice 3 (★).** Montrer que dans un village de 700 habitants, au moins 2 personnes ont les mêmes initiales.

**Résultat attendu :** Il y a 676 initiales possibles.

**Exercice 4 (★).** Dans une finale du 100 mètres à 8 coureurs, combien y a-t-il de podiums possibles ?

**Résultat attendu :** Il y a 336 podiums possibles.

**Exercice 5 (★).** Une urne contient  $n \in \mathbb{N}^*$  boules numérotées de 1 à  $n$ . Soit  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on tire simultanément  $p$  boules dans l'urne.

1. Dénombrer le nombre de tirages possibles.
2. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Dénombrer le nombre de tirages possibles dont le minimum des numéros tirés est  $k$ .
3. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $i \leq j$ . Dénombrer le nombre de tirages possibles où toutes les boules tirées ont un numéro compris entre  $i$  et  $j$ .
4. Soit  $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $k \leq l$ . Dénombrer le nombre de tirages possibles dont le minimum des numéros tirés est  $k$ , et le maximum est  $l$ .
5. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Dénombrer le nombre de tirages possibles où la boule  $i$  est tirée.
6. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Dénombrer le nombre de tirages possibles où la boule  $i$  n'est pas tirée.

**Résultat attendu :** Le nombre de possibilités vaut :

$$1. \binom{n}{p} \quad 2. \binom{n-k}{p-1} \quad 3. \binom{j-i+1}{p} \quad 4. \binom{l-k-1}{p-2} \quad 5. \binom{n-1}{p-1} \quad 6. \binom{n-1}{p}$$

**Exercice 6 (★).** Soient  $n \geq 2$  et  $p \geq 2$  deux entiers naturels tels que  $n \geq p$ . Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue  $p$  tirages avec remise.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages où les numéros des boules tirées sont tous distincts ?
3. Quel est le nombre de tirages où au moins deux des boules tirées portent le même numéro ?
4. (★★) Quel est le nombre de tirages où exactement deux des boules tirées portent le même numéro ?

**Résultat attendu :**

$$1. n^p \text{ tirages} \quad 2. \frac{n!}{(n-p)!} \text{ tirages} \quad 3. n^p - \frac{n!}{(n-p)!} \text{ tirages} \quad 4. n \binom{n-1}{p-2} \frac{p!}{2} \text{ tirages}$$

**Exercice 7 (★).** Un facteur arrive dans le hall d'un immeuble. Il doit distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-il faire dans chacun des cas suivants :

1. Chaque boîte peut contenir au plus un prospectus et les prospectus sont distincts.
2. Chaque boîte peut contenir au plus un prospectus et les prospectus sont identiques.
3. Chaque boîte peut contenir un nombre quelconque de prospectus et les prospectus sont distincts.
4. (★★★) Chaque boîte peut contenir un nombre quelconque de prospectus et les prospectus sont identiques.

**Résultat attendu :**

$$1. 604\,800 \text{ possibilités.} \quad 2. 120 \text{ possibilités.} \quad 3. 10^7 \text{ possibilités.} \quad 4. 11\,440 \text{ possibilités.}$$

**Exercice 8 (★★).** Pour réaliser un caractère en braille, on utilise 6 points placés en rectangle (2 de large, 3 de haut), et on perce au minimum un des 6 points. Combien de caractères possibles ce codage permet-il d'inventer ?

**Résultat attendu :** Il y a 63 possibilités.

**Exercice 9 (★★).** Sur une étagère, on range au hasard les  $n$  tomes d'une encyclopédie.

1. Combien y a-t-il de manières différentes de les ranger ?
2. Parmi ces rangements, combien permettent de retrouver les tomes 1 et 2 côte à côte et dans cet ordre ?

**Résultat attendu :**

1. Il y a  $n!$  rangements possibles.

2.  $(n - 1)!$  rangements satisfont ces conditions.

**Exercice 10 (★★).** On considère un jeu de 32 cartes (il y a donc 8 cartes de chaque « couleur »).

1. De combien de façons peut-on tirer une main de 8 cartes ?
2. Combien de ces mains contiendront exactement 4 cœurs ?
3. Combien de ces mains contiendront exactement 3 valets ?
4. Combien de ces mains contiendront exactement 4 cœurs et 3 valets ?
5. Combien de ces mains contiendront exactement 4 cœurs ou exactement 3 valets ?
6. Combien de ces mains contiendront au moins un cœur ?

**Résultat attendu :**

- |                            |                           |                           |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. 10 518 300 possibilités | 2. 743 820 possibilités   | 3. 393 120 possibilités   |
| 4. 22 785 possibilités     | 5. 1 114 155 possibilités | 6. 9 782 829 possibilités |

**Exercice 11 (★★).** On dispose de 4 pions numérotés de 1 à 4 et de 3 sacs numérotés de 1 à 3. On peut mettre plusieurs pions dans un sac.

1. Combien y-a-t-il de façons de placer les 4 jetons dans les 3 sacs ?
2. Soit  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , on appelle  $V_i$  l'ensemble des résultats qui amènent le sac  $i$  vide. Calculer  $\text{Card}(V_i)$ .
3. En déduire le nombre de façons de laisser au moins un sac vide.
4. Combien y-a-t-il de façons de ne laisser aucun sac vide ?

**Résultat attendu :**

- |                    |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1. 81 possibilités | 2. 16 possibilités | 3. 45 possibilités | 4. 36 possibilités |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|

**Exercice 12 (★★).** On monte un escalier en franchissant à chaque pas, soit une marche, soit deux marches.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $p_n$  le nombre de façons dont on peut enchaîner les pas d'une marche et les pas de deux marches pour gravir un escalier de  $n$  marches.
  - (a) Déterminer une relation de récurrence liant  $p_n$ ,  $p_{n-1}$  et  $p_{n-2}$ .
  - (b) En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle  $k$  le nombre de pas de deux marches que l'on peut faire pour gravir un escalier de  $n$  marches.
  - (a) Quelles sont les valeurs possibles pour  $k$  ?
  - (b) Calculer en fonction de  $k$  le nombre total de pas nécessaires.
  - (c) Déterminer le nombre de façons dont on peut opérer en faisant  $k$  pas de deux marches.
  - (d) En déduire une expression de  $p_n$  sous forme d'une somme.

**Résultat attendu :**

1. (a)  $\forall n \geq 2, p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$   
(b)  $\forall n \geq 1, p_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$
2. (a)  $k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$   
(b)  $n - k$  pas  
(c)  $\binom{n-k}{k}$  possibilités  
(d)  $p_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$

**Exercice 13 (★★★).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On s'intéresse aux listes d'entiers naturels non nuls dont la somme des termes fait  $n$ . On note  $u_n$  le nombre de ces listes.

1. Déterminer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ . Que peut-on conjecturer pour  $u_n$  ?
2. Démontrer cette conjecture.

**Résultat attendu :** On conjecture  $u_n = 2^{n-1}$ , que l'on montre ensuite par récurrence forte.