

**Exercice 1 (★).** Soit  $\varphi$  une fonction dérivable sur  $[-1, 1]$  vérifiant  $\varphi(-1) = -1$ ,  $\varphi(0) = 1$  et  $\varphi(1) = 0$ . Montrer que  $\varphi'$  s'annule au moins une fois.

**Exercice 2 (★★).** Soit  $f : [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et telle que  $f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 0$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Montrer que  $f'$  s'annule.

**Exercice 3 (★★).** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $g(0) = g(3) = 0$  et  $g(1)g(2) < 0$ . Montrer que  $g''$  s'annule.

**Exercice 4 (★★★).** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle  $I$ . On suppose que  $f$  est continue et injective. Montrer que  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .

**Exercice 5 (★).** Montrer qu'une fonction  $g$  de classe  $C^1$  sur un segment  $[a, b]$  est lipschitzienne.

**Exercice 6 (★★).** Soit  $g \in C^1(\mathbb{R})$  telle que  $\lim_{+\infty} g' = 1 = \lim_{-\infty} g'$ . Montrer que  $g$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 7 (★).** Soit  $f : t \mapsto \sqrt{t+1}$  (définie sur  $[-1, +\infty[$ ).

1. Montrer que  $f$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}_+$  (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur  $[a, b]$ , où  $-1 < a < b$ .
3.  $f$  est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

**Exercice 8 (★★).** Soit  $g : t \mapsto e^{-t} + t^2$  (définie sur  $\mathbb{R}$ ).

1. Montrer que  $g$  est lipschitzienne sur  $[0, 1]$  (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur  $[a, b]$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a < b$ .
3. Est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

**Exercice 9 (★★).** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ .

1. Soit  $h$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$  telle que  $h(a) = h(b) = 0$ , et soit  $c \in ]a, b[$ .
  - (a) Déterminer  $\beta \in \mathbb{R}$  pour lequel la fonction  $g : x \mapsto h(x) - \beta(x-a)(x-b)$  s'annule en  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
  - (b) En utilisant le théorème de Rolle, en déduire qu'il existe  $\gamma \in ]a, b[$  tel que  $h(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} h''(\gamma)$ .
2. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$ . On note  $\varphi$  la fonction affine (droite) qui interpole  $f$  en  $a$  et  $b$  (c'est-à-dire telle que  $\varphi(a) = f(a)$  et  $\varphi(b) = f(b)$ ).
  - (a) Soit  $x \in [a, b]$ , déterminer l'expression de  $\varphi(x)$  en fonction de  $x$ .
  - (b) Déduire de la question 1 que :  $\forall x \in ]a, b[, \exists \gamma \in ]a, b[$  tel que  $f(x) = \varphi(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\gamma)$ .
  - (c) Que se passe-t-il géométriquement lorsque  $f'' \geq 0$  ?

**Exercice 10 (★★).** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie et déterminer ses points fixes.
2. Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $f(x)$  puis prouver que pour tout  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$   $f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$ .
3. En déduire que pour tout  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ .
4. Déduire des questions précédentes la bonne définition et la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 11 (★).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la dérivée  $n$ -ième des fonctions suivantes :

1.  $f : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$ .
2.  $g : x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$ .

**Exercice 12 (★★).** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $P_n$  la fonction polynomiale définie sur  $\mathbb{R}$  par  $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  on a  $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$ .
2. En déduire que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$   $P_n^{(k)}$  admet (au moins)  $k$  racines distinctes strictement comprises entre  $-1$  et  $1$ .

**Exercice 13 (★).** Prouver que :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$
2.  $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(u) \leq u$  et  $2u \leq \pi \sin(u)$

**Exercice 14 (★★).** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 2 \exp(\frac{x}{2}) - 1$ .

**Exercice 15 (★★).** Déterminer les intervalles de  $\mathbb{R}$  où les fonctions suivantes sont convexes.

1.  $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 12}$
2.  $g : x \mapsto |x|$

**Exercice 16 (★★).** Soit  $(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Comparer  $\frac{a_1 + a_2}{2}$  et  $\sqrt{a_1 a_2}$ .