ECS1

Exercices: Dérivabilité

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul, et soient α_1, α_2, $\dots\alpha_n$ des réels strictement positifs et distincts deux à deux. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on définit la fonction g_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g_k(x) = |x - \alpha_k| .$$

Soit λ_1, λ_2, …, λ_n des réels fixés. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ comme : $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que si $\lambda_k \neq 0$, alors g n'est pas dérivable en α_k.
2. En déduire que la famille $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la dérivabilité sur l'ensemble de définition (que l'on précisera). On déterminera ensuite les fonctions dérivées.

1. $f(x) = x^x$
2. $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$
3. $h(x) = x\sqrt{x^2 - x}$
4. $i(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$
5. $j(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$
6. $k(x) = \ln\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

1. Montrer qu'il existe une partie K de $\mathbb{R}$ telle que f définie de $\mathbb{R}$ sur K admette une bijection réciproque que l'on notera g.
2. g est-elle dérivable sur K ? S'il existe, calculer $g'(-1)$.

Exercice 4. Étudier la fonction h définie par $h(x) = |x - 3| - \dfrac{2}{x - 1}$ sur un intervalle de définition à déterminer. Tracer sa courbe représentative en précisant les tangentes aux points remarquables.

Exercice 5. Pour tout réel a, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{-x} + ax$ et on note C_a la courbe représentative de f_a.

1. Montrer que pour tout réel b, la tangente en b à la courbe C_a passe par un point de l'axe des ordonnées qui est indépendant de a.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer, pour a fixé et suivant la valeur de m, le nombre de tangentes à la courbe C_a qui passent par le point de coordonnées $(0; m)$.

Exercice 6. Montrer que si une fonction polynôme f de degré n admet n racines réelles distinctes, alors f' admet $n - 1$ racines distinctes.

Exercice 7. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $\forall x \in [a, b]$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. Montrer que $\exists c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice 8. Montrer que $\forall x > 0$, $\dfrac{x}{1 + x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 + 2e^x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Étudier f sur son ensemble de définition E.
2. Prouver qu'il existe un unique réel $\alpha \in [-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
3. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant u_n$, puis que $\alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant -1$.
4. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 10. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. On définit la suite $(u_n)_n$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition E de f.
2. Résoudre l'équation d'inconnue x réel, $f(x) = x$.
3. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et prouver que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$f(x) \geqslant \sqrt{\frac{3}{4}},$$

   puis que, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

   (b) En utilisant le résultat de la question 3., étudier la convergence de suite $(u_n)_n$.