Dérivabilité

Exercice 1 (★). Soit φ une fonction dérivable sur $[-1,1]$ vérifiant $\varphi(-1)=-1$, $\varphi(0)=1$ et $\varphi(1)=0$.
Montrer que φ' s'annule au moins une fois.
Résultat attendu : Le théorème des valeurs intermédiaires donne un point d'annulation supplémentaire entre -1 et 0, ce qui permet d'appliquer ensuite le théorème de Rolle.

Exercice 2 (★★). Soit $f : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(-1)=1$, $f(0)=0$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Montrer que f' s'annule.
Résultat attendu : Le théorème des valeurs intermédiaires donne un point supplémentaire où la valeur 1 est atteinte, ce qui permet d'appliquer ensuite le théorème de Rolle.

Exercice 3 (★★). Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $g(0)=g(3)=0$ et $g(1)g(2)<0$.
Montrer que g'' s'annule.
Résultat attendu : Le théorème des valeurs intermédiaires donne un point supplémentaire d'annulation, ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle pour déterminer les annulations de g', puis de g''.

Exercice 4 (★★★). Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On suppose que f est continue et injective. Montrer que f est strictement monotone sur I.
Résultat attendu : On raisonne par l'absurde, la contradiction est ensuite obtenue grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 5 (★). Montrer qu'une fonction g de classe C^1 sur un segment $[a,b]$ est lipschitzienne.
Résultat attendu : On applique le théorème des bornes atteintes à g', puis l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 6 (★★). Soit $g \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} g' = 1 = \lim\limits_{-\infty} g'$. Montrer que g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
Résultat attendu : On utilise les propriétés des limites et le théorème des bornes atteintes pour montrer que g' est bornée, puis on conclut avec l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 7 (★). Soit $f : t \mapsto \sqrt{t+1}$ (définie sur $[-1,+\infty[$).

1. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a,b]$, où $-1<a<b$.
3. f est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

Résultat attendu :

1. On montre par inégalité des accroissements finis que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
2. On montre par inégalité des accroissements finis que f est $\frac{1}{2\sqrt{a+1}}$-lipschitzienne sur $[a,b]$.
3. Non, on le montre par l'absurde (un passage à la limite donne la contradiction).

Exercice 8 (★★). Soit $g : t \mapsto e^{-t}+t^2$ (définie sur $\mathbb{R}$).

1. Montrer que g est lipschitzienne sur $[0,1]$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a,b]$, où a et b sont deux réels tels que $a<b$.
3. Est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

Résultat attendu :

1. On montre par inégalité des accroissements finis que f est 3-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
2. On montre par inégalité des accroissements finis que f est $(2b+e^{-a})$-lipschitzienne sur $[a,b]$.
3. Non, on le montre par l'absurde (un passage à la limite donne la contradiction).

Exercice 9 (★★). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a<b$.

1. Soit h une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ telle que $h(a)=h(b)=0$, et soit $c \in]a,b[$.
   (a) Déterminer $\beta \in \mathbb{R}$ pour lequel la fonction $g : x \mapsto h(x) - \beta(x-a)(x-b)$ s'annule en a, b et c.
   (b) En utilisant le théorème de Rolle, en déduire qu'il existe $\gamma \in]a,b[$ tel que $h(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} h''(\gamma)$.
2. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$. On note φ la fonction affine (droite) qui interpole f en a et b (c'est-à-dire telle que $\varphi(a)=f(a)$ et $\varphi(b)=f(b)$).
   (a) Soit $x \in [a,b]$, déterminer l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de x.
   (b) Déduire de la question 1 que : $\forall x \in]a,b[$, $\exists \gamma \in]a,b[$ tel que $f(x) = \varphi(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\gamma)$.
   (c) Que se passe-t-il géométriquement lorsque $f'' \geqslant 0$?

Résultat attendu :

1. (a) g s'annule toujours en a et b. Elle s'annule en c si et seulement si $\beta = \frac{h(c)}{(c-a)(c-b)}$.
   (b) g' s'annule deux fois, donc g'' s'annule en un point γ et en remplaçant on trouve la relation.
2. (a) $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{f(a)b-af(b)}{b-a}$.
   (b) On applique le résultat de la question 1 à $h : x \mapsto f(x) - \varphi(x)$.
   (c) La courbe est en dessous de la sécante sur $[a,b]$ car $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) - f(x) = -\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(\gamma) \geqslant 0$ (en effet, sur $[a,b]$, $(x-a)(x-b) \leqslant 0$).

Exercice 10 (★★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est bien définie et déterminer ses points fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ puis prouver que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $f(x) \geqslant \sqrt{\frac{3}{4}}$.
3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. Déduire des questions précédentes la bonne définition et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Résultat attendu :

1. $x \mapsto x^2 - x + 1$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, donc f est bien définie. Son unique point fixe est 1.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{f(x)}$. Une étude des variations donne ensuite $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $f(x) \geqslant f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$.
3. On utilise l'expression de f' et la minoration de f obtenues en question précédente.
4. On se place sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ stable par f, qui contient u_0 et sur lequel (par inégalité des accroissements finis) f est lipschitzienne de rapport $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Donc u est bien définie et converge vers 1.

Exercice 11 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$.
2. $g : x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$.

Résultat attendu :

1. On trouve par la formule de Leibniz pour $n \geqslant 3$ (et on vérifie à la main les premiers cas) que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}\left(x^3 + (1-3n)x^2 + (3n^2 - 5n)x - n^3 + 4n^2 - 3n + 1\right).$$
2. La formule de Leibniz donne $\forall x > 0$, $g^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 12 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.
2. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ $P_n^{(k)}$ admet (au moins) k racines distinctes strictement comprises entre -1 et 1.

Résultat attendu :

1. Découle des propriétés sur les ordres de multiplicité d'une racine.
2. On le montre par récurrence à l'aide du théorème de Rolle.

Exercice 13 (★). Prouver que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$
2. $\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(u) \leqslant u$ et $2u \leqslant \pi\sin(u)$

Résultat attendu :

1. On étudie la convexité de $x \mapsto x^{n+1}$, puis la comparaison de la courbe avec une tangente bien choisie.
2. On étudie la convexité de $u \mapsto \sin(u)$, puis la comparaison de la courbe avec une sécante et une tangente bien choisies.

Exercice 14 (★★). Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 2\exp(\frac{x}{2}) - 1$.
Résultat attendu : On étudie la convexité de $x \mapsto \exp(x)$, puis on utilise les propriétés des sécantes.

Exercice 15 (★★). Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où les fonctions suivantes sont convexes.

1. $f : x \to \dfrac{x^3}{x^2 + 12}$
2. $g : x \to |x|$

Résultat attendu : f est convexe sur $]-\infty, -6]$ et sur $[0, 6]$, concave ailleurs. g est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 (★★). Soit $(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comparer $\dfrac{a_1 + a_2}{2}$ et $\sqrt{a_1 a_2}$.

Résultat attendu : La concavité de $x \to \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donne après calculs $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}$.