ECS1 **Exercices: Dérivées successives**

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \to (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$.
2. $g : x \to x^{n-1}\ln(x)$

Exercice 2. Soit p un entier naturel tel que $p \geqslant 1$. Donner l'expression, sans symbole de sommation, des dérivées p-ièmes des fonctions suivantes :

1. $f : x \to e^x \cos(x)$
2. $h : x \to \dfrac{1-x}{1+x}$

Exercice 3. On définit la fonction f par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que la dérivée n-ième de f s'écrit sous la forme
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}},$$
où P_n est un polynôme vérifiant une relation de récurrence que l'on explicitera.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

Exercice 4. Prouver que pour tout $u \geqslant 0$,
$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right) \leqslant \frac{3}{8}u^2.$$

Exercice 5. En utilisant une formule de Taylor, montrer qu'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme si et seulement si ses dérivées successives sont nulles à partir d'un certain rang.

Exercice 6. Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = 0$.

Soit la fonction φ définie pour tout $x \neq 0$ par $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Prouver que φ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$, noté ψ.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les formules de Taylor et Leibniz, prouver que pour tout réel $x \neq 0$,
$$x^{n+1}\psi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)dt.$$
3. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$.
4. En déduire que $\psi^{(n)}$ est une fonction bornée au voisinage de 0.
5. En dérivant la relation de la question 2, en déduire que
$$\lim_{x \to 0} \psi^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$