Déterminants

Exercice 1. Pour chacune des matrices ci-dessous, calculer son déterminant, déterminer si elle est inversible ou non, et si oui, donner le déterminant de son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Calculer le déterminant de :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $n \geqslant 3$ un entier, et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$a_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \\ n-1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad b_n = \begin{vmatrix} 1 & x & & & \\ x & 1 & & (0) & \\ & & x & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & x \end{vmatrix} \qquad c_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4. On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ la famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = XP'(X+2) + P(1)(X^3 - 1)$.

1. Montrer que f est bien définie, et linéaire.
2. Calculer $\det(f)$. f est-elle un automorphisme ?

Exercice 6 (Déterminants de Vandermonde)**.** Pour tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(a,b,c)$, pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, puis $V(a,b,c,d)$, pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$.
2. Exprimer $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en fonction de $V(a_2, \ldots, a_n)$, puis en déduire une formule générale pour $V(a_1, \ldots, a_n)$.

Exercice 7. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$.

Calculer le déterminant de taille n suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$

Indication : commencer par déterminer une relation de récurrence sur les Δ_n. Par convention, $\Delta_0 = 1$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

1. Montrer l'équivalence :

$$\varphi_A \text{ est une symétrie} \iff \left(\begin{array}{c} \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ tel que } A = PDP^{-1} \text{ où } D \text{ est} \\ \text{une matrice diagonale de 1 et de } -1. \end{array} \right)$$

2. Dans ce cas, que vaut le déterminant de φ_A ?

Exercice 9. Soit $A(X) = X^3 - X^2 - X + 2$ et $B(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
2. Déterminer la matrice M représentative de f dans la base canonique, et montrer que f est un automorphisme.