Déterminants

Exercice 1 (★). Pour chacune des matrices ci-dessous, calculer son déterminant, déterminer si elle est inversible ou non, et si oui, donner le déterminant de son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Résultat attendu : $\det(A) = -5$, donc A est inversible et $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{5}$. $\det(B) = 17$, donc B est inversible et $\det(B^{-1}) = \frac{1}{17}$. $\det(C) = 0$, donc C n'est pas inversible.

Exercice 2 (★). Calculer le déterminant de :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Résultat attendu : $\det(A) = 18$, $\det(B) = 8$, $\det(C) = -2$.

Exercice 3 (★). On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ la famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Résultat attendu : C'est une base si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{3}{2}\}$.

Exercice 4 (★). Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = XP'(X+2) + P(1)(X^3 - 1)$.

1. Montrer que f est bien définie et linéaire.
2. Calculer $\det(f)$. L'application f est-elle un automorphisme ?

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\det(f) = -6 \neq 0$, donc f est un automorphisme.

Exercice 5 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ son application linéaire canoniquement associée.

1. Montrer que φ_A est une symétrie si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale de 1 et de -1.
2. Dans ce cas, que vaut le déterminant de φ_A ?

Résultat attendu :

1. On raisonne par double implication, en utilisant la caractérisation des symétries et un choix de base judicieux.
2. $\det(\varphi_A) = \pm 1$.

Exercice 6 (★★). Soit $n \geqslant 3$ un entier, et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$a_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \\ n-1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad b_n = \begin{vmatrix} 1 & x & & & \\ x & 1 & & (0) & \\ & & x & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & x \end{vmatrix} \qquad c_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Résultat attendu : $a_n = (-1)^{n+1} n!$, $b_n = (1-x^2)x^{n-2}$. Si $x = -1$, $c_n = (-1)^{n-1} n$, sinon $c_n = (-1)^{n-1} \frac{1-(-x)^n}{1+x}$.

Exercice 7 (★★). Pour tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit le déterminant de Vandermonde comme :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(a,b,c)$, pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, puis $V(a,b,c,d)$, pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. On attend des résultats finaux sous forme factorisée.
2. Exprimer $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en fonction de $V(a_2, \ldots, a_n)$, puis en déduire une formule générale pour $V(a_1, \ldots, a_n)$.

Résultat attendu :

1. $V(a,b,c) = (b-a)(c-a)(c-b)$, puis $V(a,b,c,d) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.
2. $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(a_k - a_1)\right) V(a_2, \ldots, a_n) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Exercice 8 (★★). Soit $A(X) = X^3 - X^2 - X + 2$ et $B(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
2. Déterminer la matrice M représentative de f dans la base canonique, et montrer que f est un automorphisme.

Résultat attendu :

1. On utilise le théorème de division euclidienne.
2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $\det(M) = 8 \neq 0$.

Exercice 9 (★★★). Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$.

Calculer le déterminant de taille n suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$

Indication : commencer par déterminer une relation de récurrence sur les Δ_n. Par convention, $\Delta_0 = 1$.

Résultat attendu : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \cos(\theta n) + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(\theta n)$.