Exercices: Ensembles, Applications

Exercice 1. Soit E un ensemble et X et Y deux sous-ensembles de E

1. Calculer $A = (X \cap Y) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right)$ puis calculer $B = (X \cup Y) \cap \left(X \cup \overline{Y}\right)$.
2. Calculer $C = (X \cap Y) \cup \left(X \cap \overline{Y}\right) \cup \left(\overline{X} \cap Y\right) \cup \left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right)$.
3. Calculer $D = (X \cup Y) \cap \left(X \cup \overline{Y}\right) \cap \left(\overline{X} \cup Y\right) \cap \left(\overline{X} \cup \overline{Y}\right)$.

Exercice 2. Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensemble A et B de E, on pose $A \triangledown B = \overline{A \cup B}$.

1. Exprimez $\overline{A}$ à l'aide de A et de l'opération $\triangledown$.
2. Calculez pour toutes parties A et B de E, $(A \triangledown A) \triangledown (B \triangledown B)$.
3. Soit A et B deux parties de E. Exprimer $A \cup B$ et $A \setminus B$ à l'aide de A, B et de la loi $\triangledown$ uniquement.

Exercice 3. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'événement : obtenir Pile au n-ième lancer. Écrire à l'aide de la famille d'événements $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les événements suivants :

1. L'événement A : obtenir le premier pile au 10-ième lancer.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_k : obtenir le premier pile au k-ième lancer.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement B_k : obtenir le premier pile au plus tard au k-ième lancer.
4. L'événement B : obtenir au moins un pile.
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement C_k : la longueur de la première succession de Pile ou de Face est k.

Exercice 4. On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les ensembles suivants :

$A = \{$ les deux cartes tirées sont rouges $\}$
$B = \{$ les deux cartes tirées sont un valet et un dix $\}$
$C = \{$ les deux cartes tirées sont des figures $\}$

1. Que représentent les ensembles suivants ?
   (a) $\overline{A}$ (b) $A \cap B \cap \overline{C}$ (c) $(A \cap B) \cap C$ (d) $(A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C})$
2. Écrire à l'aide des ensembles A,B,C les ensembles :
   $F = \{$ les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges $\}$
   $G = \{$ on obtient au plus une figure $\}$

Exercice 5. Montrer les égalités suivantes

1. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}, n\right] = \{1\}$.
2. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + n\right] = \mathbb{R}_+$.

Exercice 6. Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-y, x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \mapsto \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, x+y) \end{array}$.

1. Déterminer les images par f de $A = (-1,0)$, $B = (1,2)$ et $C = \left(-\frac{3}{5}, 3\right)$.
2. Déterminer les images par g de $F = (2,0,1)$, $G = (-3,1,2)$ et $H = \left(-\frac{3}{5}, 1, 1\right)$.
3. Déterminer les antécédents par f de F, G et H.
4. Déterminer les antécédents par g de A, B et C.
5. g est-elle injective ? surjective ?
6. f est-elle injective ? surjective ?
7. Définir les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 7. Soit f définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f : x \longrightarrow 2x + 3$. f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 8. Soit $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par : $h(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, et $h(n) = \frac{n+1}{2}$ si n est impair.

1. h est-elle une application ?
2. h est-elle une surjection ? une injection ?

Exercice 9. Soit $f :]\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \ln(2x-1) + 3$. Montrer que f est une bijection, et trouver f^{-1}.

Exercice 10. Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \mapsto \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x+y, x-y) \end{array}$. f est-elle bijective ? Si oui, définir f^{-1}.

Exercice 11. Soit $g : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, x-y, x) \end{array}$. g est-elle bijective ? Si oui, définir g^{-1}.

Exercice 12. Soit a une application définie de E dans F et b une application définie de F dans G.

1. Prouver que : $b \circ a$ injective sur $E \Longrightarrow a$ injective sur E.
2. Prouver que : $b \circ a$ surjective de E dans $G \Longrightarrow b$ surjective de F dans G.