

Exercice 1 (★). Traduire la définition des ensembles suivants avec des notations ensemblistes.

1. F_1 : l'ensemble des carrés parfaits (c'est-à-dire 1, 4, 9, 16, etc.), à écrire de deux façons différentes.
2. F_2 : l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui sont décroissantes.
On rappelle que l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} se note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2 (★). On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les ensembles suivants :

$A = \{ \text{les deux cartes tirées sont rouges} \}$

$B = \{ \text{les deux cartes tirées sont un valet et un dix} \}$

$C = \{ \text{les deux cartes tirées sont des figures} \}$

1. Que représentent les ensembles suivants ?

(a) \bar{A}

(b) $A \cap B \cap \bar{C}$

(c) $(A \cap B) \cap C$

(d) $(A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C})$

2. Écrire à l'aide des ensembles A, B, C les ensembles :

$F = \{ \text{les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges} \}$

$G = \{ \text{on obtient au plus une figure} \}$

Exercice 3 (★★). On lance une infinité de fois une pièce équilibrée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \{ \text{obtenir Pile au } n\text{-ième lancer} \}$. Écrire les événements suivants à l'aide des $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

1. $A = \{ \text{obtenir le premier pile au } 10\text{-ième lancer} \}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \{ \text{obtenir le premier pile au } k\text{-ième lancer} \}$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \{ \text{obtenir le premier pile au plus tard au } k\text{-ième lancer} \}$.
4. $B = \{ \text{obtenir au moins un pile} \}$.
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $C_k = \{ \text{la longueur de la première succession de Pile ou de Face est } k \}$.

Exercice 4 (★). Soit E un ensemble et X et Y deux sous-ensembles de E .

1. Calculer $A = (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y})$.
2. Calculer $B = (X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y})$.
3. Calculer $C = (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y})$.
4. Calculer $D = (X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y}) \cap (\bar{X} \cup Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})$.

Exercice 5 (★★). Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . Montrer l'équivalence suivante :

$$A \cup B = A \cap B \iff A = B.$$

Exercice 6 (★★★). Montrer que $\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty, -k] = \emptyset$.

Exercice 7 (★). Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 210 et 225 et en déduire leur PGCD et PPCM.