Équations différentielles

Exercice 1 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' + 3y = 0$
2. $y' - 2ty = 0$
3. $y' + ay = 0$
4. $y' + \sin(3t)y = 0$
5. $y' + \dfrac{e^t}{e^t + 1}y = 0$

Exercice 2 (★). Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2ty = e^{t+t^2}$, sur $I = \mathbb{R}$
2. $y' + \dfrac{1}{t}y = e^t$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 3 (★). Déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2y = 3$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $y' - 2y = t^2$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $y' - 2y = e^{4t}$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $y' - 2y = 3e^{2t}$ sur $I = \mathbb{R}$
5. $y' - 2y = \sin(2t)$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $y' - 2y = 4\sin(2t) - 2t^2$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 4 (★★). Résoudre (en précisant l'intervalle de résolution), les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y'(x) - y(x) = x$
2. $y'(x) + y(x) = 2(e^x + e^{-x})$
3. $y'(x) = 2y(x) + (2x^2 - 1)e^{x^2}$
   Indication : solution particulière de la forme $x \mapsto (ax + b)e^{x^2}$
4. $(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 0$
5. $y'(x) + y(x)\tan(x) = \cos^2(x)$

Exercice 5 (★★). Résoudre sur $]-1, +\infty[$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs réelles) :

$$\begin{cases} (x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 6 (★). Résoudre les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x^2 + 1$
2. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}$
3. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \sin(x)$
4. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x$
5. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 2$

Exercice 7 (★★). Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs complexes) :

$$\begin{cases} y''(x) - 2(1+i)y'(x) + 2iy(x) = x + i \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 8 (★★★).

1. Pour chacune des deux fonctions suivantes, déterminer une équation différentielle d'ordre 1 qui est vérifiée par cette fonction.

$$u : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan(t) \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{t} \end{array}$$

2. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions u de classe C^1 sur un intervalle I (intervalle à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t \in I$: $u'(t) = 1 + u(t)^2$.
3. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions v de classe C^1 sur un intervalle I (intervalle à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t \in I$: $v(t) \neq 0$ et $v'(t) = \dfrac{1}{2v(t)}$.