Équations différentielles

Exercice 1 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' + 3y = 0$
2. $y' - 2ty = 0$
3. $y' + ay = 0$
4. $y' + \sin(3t)y = 0$
5. $y' + \dfrac{e^t}{e^t+1}y = 0$

Résultat attendu : Les ensembles de solutions sont :

1. $\{t \mapsto Ce^{-3t} | C \in \mathbb{R}\}$
2. $\{t \mapsto Ce^{t^2} | C \in \mathbb{R}\}$
3. $\{t \mapsto Ce^{-at} | C \in \mathbb{R}\}$
4. $\{t \mapsto Ce^{\frac{\cos(3t)}{3}} | C \in \mathbb{R}\}$
5. $\{t \mapsto \frac{C}{e^t+1} | C \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2 (★). Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2ty = e^{t+t^2}$, sur $I = \mathbb{R}$
2. $y' + \dfrac{1}{t}y = e^t$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Résultat attendu : Une résolution avec variation de la constante donne comme ensembles de solutions :

1. $\{t \mapsto Ce^{t^2} + e^{t+t^2} | C \in \mathbb{R}\}$
2. $\left\{t \mapsto \dfrac{C}{t} + e^t - \dfrac{e^t}{t} \middle| C \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 3 (★). Déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2y = 3$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $y' - 2y = t^2$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $y' - 2y = e^{4t}$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $y' - 2y = 3e^{2t}$ sur $I = \mathbb{R}$
5. $y' - 2y = \sin(2t)$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $y' - 2y = 4\sin(2t) - 2t^2$ sur $I = \mathbb{R}$

Résultat attendu :

1. $t \mapsto -\dfrac{3}{2}$
2. $t \mapsto -\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4}$
3. $t \mapsto \dfrac{e^{4t}}{2}$
4. $t \mapsto 3te^{2t}$
5. $t \mapsto -\dfrac{\cos(2t) + \sin(2t)}{4}$
6. $t \mapsto t^2 + t + \dfrac{1}{2} - \cos(2t) - \sin(2t)$

Exercice 4 (★★). Résoudre (en précisant l'intervalle de résolution), les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y'(x) - y(x) = x$
2. $y'(x) + y(x) = 2(e^x + e^{-x})$
3. $y'(x) = 2y(x) + (2x^2 - 1)e^{x^2}$
   Indication : solution particulière de la forme $x \mapsto (ax+b)e^{x^2}$
4. $(x^2+1)y'(x) + xy(x) = 0$
5. $y'(x) + y(x)\tan(x) = \cos^2(x)$

Résultat attendu :

1. Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^x - 1 - x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{-x} + e^x + 2xe^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{2x} + (x+1)e^{x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
4. Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
5. Les solutions sont les fonctions définies sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la forme $x \mapsto C\cos(x) + \sin(x)\cos(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (★★). Résoudre sur $]-1, +\infty[$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs réelles) :

$$\begin{cases} (x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Résultat attendu : La solution est la fonction définie de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{e^x+1}{1+x}$.

Exercice 6 (★). Résoudre les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x^2 + 1$
2. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}$
3. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \sin(x)$
4. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x$
5. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 2$

Résultat attendu :

1. $\left\{C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{x^2}{6}+\frac{5x}{18}+\frac{37}{108}\middle|(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$
2. $\{(C_1+C_2x)e^{-2x}+e^{-x}|(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\}$
3. $\left\{(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{4\cos(x)+3\sin(x)}{25}\middle|(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$
4. $\{(C_1+C_2x)e^{x}+x^2e^{x}|(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\}$
5. $\left\{(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))e^{x}+\frac{2}{5}\middle|(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 7 (★★). Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs complexes) :

$$\begin{cases} y''(x)-2(1+i)y'(x)+2iy(x)=x+i \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Résultat attendu : La solution est la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $x\mapsto\left(\frac{i}{2}-\frac{x}{2}\right)e^{(1+i)x}-\frac{i}{2}x-\frac{i}{2}$.

Exercice 8 (★★★).

1. Pour chacune des deux fonctions suivantes, déterminer une équation différentielle d'ordre 1 qui est vérifiée par cette fonction.

$$u:\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan(t)\end{array} \qquad v:\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{t}\end{array}$$

2. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions u de classe C^1 sur un intervalle I (intervalle à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t\in I$: $u'(t)=1+u(t)^2$.
3. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions v de classe C^1 sur un intervalle I (intervalle à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t\in I$: $v(t)\neq 0$ et $v'(t)=\frac{1}{2v(t)}$.

Résultat attendu :

1. $\forall t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $u'(t)=1+u(t)^2$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $v'(t)=\frac{1}{2v(t)}$.
   Les questions suivantes s'étudient par analyse-synthèse.
2. Pour tout $C\in\mathbb{R}$, la fonction définie sur $I=]-C-\frac{\pi}{2},-C+\frac{\pi}{2}[$ par $t\mapsto\tan(t+C)$ est solution.
3. Pour tout $C\in\mathbb{R}$, la fonction définie sur $I=[-C,+\infty[$ par $t\mapsto\sqrt{t+C}$ est solution.