Exercices: Espaces probabilisés

Exercice 1. Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé.

1. Montrer que si ces deux événements sont incompatibles et indépendants alors l'un des deux est négligeable.
2. Montrer que si A est négligeable, alors A et B sont indépendants et $P(A\cap B) = 0$. En quoi est-ce différent de la réciproque du résultat précédent ?
3. Déterminer les événements incompatibles avec eux mêmes.
4. Déterminer les événements indépendants d'eux mêmes.

Exercice 2 (Inégalité de Boole)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i),$$
où le second membre peut éventuellement diverger.
2. En déduire qu'une union dénombrable d'événements négligeable est négligeable.
3. De même, montrer qu'une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

Exercice 3. Une personne se trouve devant une porte fermée à clef. Elle dispose d'un trousseau de $n \in \mathbb{N}^*$ clés parmi lesquelles une seule ouvre la porte.

1. Elle essaie les clés successivement. Quelle est la probabilité qu'elle ouvre la porte au k-ième essai ?
2. Même question avec une personne qui ne se souvient plus des clés qu'elle vient d'essayer.

Exercice 4. Soit une urne avec une boule blanche, une boule noire et une boule rouge. On y effectue des tirages successifs avec remise. Soit B l'événement « On tire au moins une boule blanche ». Calculer $P(B)$ de trois façons différentes :

1. En utilisant les événements A_i : « aucune boule blanche n'est tirée sur les i premiers tirages ».
2. En utilisant les événements B_i : « la première boule blanche est tirée au i-ième tirage ».
3. En utilisant les événements C_i : « au moins une boule blanche est tirée sur les i premiers tirages ».

Exercice 5. Une pièce amène Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $1 - p$. On lance cette pièce un nombre infini de fois, les lancers successifs étant supposés indépendants.

1. Soit A_n l'événement « Pile sort pour la première fois au n-ième lancer ». Calculer $P(A_n)$.
2. Soit B l'événement « On obtient au moins un Pile ». Calculer $P(B)$.
3. Soit C l'événement « Pile sort pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers ». Calculer $P(C)$.
4. Soit D l'événement « Pile sort pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 6 ». Calculer $P(D)$.
5. Les événements C et D sont-ils indépendants ?

Exercice 6. On effectue une infinité de lancers indépendants d'une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité qu'au cours des n premiers lancers, on n'ait jamais une succession face-pile (dans cet ordre) ?
2. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir une succession face-pile ?

Exercice 7. Un fumeur impénitent décide d'essayer de ne plus fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut $0,3$. Par contre, s'il succombe un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut $0,9$.

Soit $n \geqslant 1$, on pose F_n l'événement «la personne fume le n-ième jour» et $p_n = P(\overline{F_n})$.

1. Déterminer, pour tout $n \geqslant 2$, une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1}.
2. Calculer, pour tout $n \geqslant 1$, p_n en fonction de n et de p_1.
3. « En fin de compte, il a plus de chances de s'arrêter que de continuer. » Vrai ou Faux ?

Exercice 8. Une urne contient initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue une série de tirages de la façon suivante : on choisit une boule au hasard dans l'urne, si cette boule est blanche, on la remet, si elle est noire, on la remplace par une blanche. Puis on procède au tirage suivant.

1. On note N_j l'événement « On obtient une boule noire au j-ème tirage » et A_n : « On obtient pour la première fois une boule blanche au n-ème tirage ».
   (a) Exprimez A_n en fonction des N_j.
   (b) En déduire $P(A_n)$.
2. On note B_ℓ : « Il reste ℓ boules noires dans l'urne lorsque l'on obtient la première boule blanche ».
   (a) Calculer $P(B_0)$.
   (b) On pose $N = a + b$. Montrer que pour $\ell \geqslant 1$,

$$P(B_\ell) = \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^\ell}{\ell!} - \frac{N^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\right).$$

   (c) Que conclure sur l'événement $\bigcup_{\ell=0}^{b} B_\ell$?

Exercice 9. Trois personnes A, B et C jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée de la façon suivante :
— La première partie oppose A et B.
— Le vainqueur d'une partie est opposé ensuite à celui qui n'a pas joué.
— Le vainqueur du tournoi est le premier qui gagne deux parties consécutives.
Exemple :
P1 - A gagne contre B P2 - C gagne contre A P3 - B gagne contre C P4 - A gagne contre B
P5 - A gagne contre C : A est le vainqueur du tournoi !

1. Après quelles parties le joueur A peut-il être déclaré vainqueur du tournoi (on envisagera deux cas en fonction de l'issue de la première partie) ?
2. Calculer les probabilités correspondantes et les "réunir" pour calculer la probabilité que A soit déclaré vainqueur du tournoi.
3. En déduire astucieusement le calcul de la probabilité que B soit déclaré vainqueur du tournoi.
4. Après quelles parties le joueur C peut-il être déclaré vainqueur du tournoi ?
5. Calculer les probabilités correspondantes et les "réunir" pour calculer la probabilité que C soit déclaré vainqueur du tournoi.
6. Montrer que « la partie s'achève » est un événement presque sûr.