ECS1 **Exercices: Espaces vectoriels de dimension finie**

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^5$ muni de la base canonique $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$, on donne les sous-espaces vectoriels :

$$F_1 = \mathrm{Vect}(e_2, e_5), \quad F_2 = \mathrm{Vect}(e_3) \text{ et } F_3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_4).$$

1. A-t-on $\mathbb{R}^5 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$?
2. On donne $u = 3e_1 + 5e_2 - 4e_3 + e_5$. Écrire u comme somme d'un vecteur de F_1, de F_2 et de F_3. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 2. Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3, (b, c) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $\varepsilon_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (2, 1, 3, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, -1, 1, 1)$.

1. Prouver que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{C}^3$, on donne

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, 3x + 4y + 5iz = 0\}.$$

H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$? Si oui, en donner une base et déterminer un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{C}^3$.

Exercice 5. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $e_1 = (1, 1, 0)$. On pose :

$$F_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = m\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}(e_1).$$

1. Déterminer les valeurs de m telles que F_m soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Prouver qu'alors $\mathbb{R}^3 = F_m \oplus G$.

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on donne :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}.$$

1. Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. La somme $F + G$ est-elle directe ?
3. Déterminer un sous-espace supplémentaire de $F \cap G$ dans F, que l'on notera F_1.
4. Déterminer un sous-espace supplémentaire de de $F \cap G$ dans G, que l'on notera G_1.
5. Prouver que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus (F \cap G) \oplus G_1$.

Exercice 7. Démontrer que l'ensemble E des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice 8. Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient : il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 9. Dans l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne les éléments f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 définis par : pour tout réel x,

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \sin x \quad \text{et} \quad f_4(x) = \cos(2x).$$

Déterminer le rang de la famille $S = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, soit H l'espace vectoriel des polynômes admettant 2 pour racine. Déterminer une base de H. H est-il un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $F = \text{Vect}\,(X-1, X)$ et $G = \{P \in E | P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 12. Soit n un entier naturel non nul, on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Vérifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Dans la suite, on pose $n = 3$. Soit A et B les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Écrire A et B comme sommes d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.