Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 (★). Montrer que $\mathcal{F} = ((1, -3, 0), (0, 2, 1), (1, 0, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Résultat attendu : On montre que c'est une famille libre à $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ éléments.

Exercice 2 (★). On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Soient $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(2) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Résultat attendu :

1. C'est immédiat pour F, on montre que G contient le polynôme nul et est stable par combinaison linéaire.
2. On détermine une base de $F \cap G$ à un élément.

Exercice 3 (★). Démontrer que l'ensemble E des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
Résultat attendu : C'est un sous-espace vectoriel de l'ensembles des suites réelles, de dimension 2.

Exercice 4 (★). Soit F l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$, solutions de $y'' + y' - 2y = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie et déterminer une base.
Résultat attendu : C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont une base est $(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-2t})$.

Exercice 5 (★). Soit $E = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x)\right\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Résultat attendu :

1. C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
2. Une base est $(x \to \cos(x), x \to x\cos(x), x \to x^2\cos(x))$ et $\dim(E) = 3$.

Exercice 6 (★★). Montrer que la famille $\left(X^k(X-1)^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Résultat attendu : On montre que c'est une famille libre à $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments.

Exercice 7 (★★). Dans $\mathbb{R}_n[X]$, soit H l'espace vectoriel des polynômes admettant 2 pour racine. Déterminer une base et la dimension de H.
Résultat attendu : H est de dimension n, de base par exemple $\left(X^k(X-2)\right)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ ou $\left((X-2)^k\right)_{k \in [\![1, n]\!]}$.

Exercice 8 (★). On se place dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = ((3, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 1, 1))$.
Résultat attendu : On trouve $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 9 (★★). Dans l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne les éléments f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 définis par : pour tout réel x,

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \sin x \quad \text{et} \quad f_4(x) = \cos(2x).$$

Déterminer le rang de la famille $S = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$.
Résultat attendu : On trouve $\mathrm{rg}(S) = 4$.

Exercice 10 (★). Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $\varepsilon_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (2, 1, 3, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, -1, 1, 1)$.

1. Prouver que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Résultat attendu :

1. $\varepsilon_4 = (1, 0, 0, 0)$ convient (par exemple).
2. La caractérisation des supplémentaires par les bases montre que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_4)$ convient.

Exercice 11 (★). Dans $\mathbb{C}^3$, on donne $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, 3x + 4y + 5iz = 0\}$. H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$? Si oui, en donner une base et déterminer un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{C}^3$.
Résultat attendu : H est un sous-espace vectoriel de C^3. Une base de H est $((-\frac{4}{3}, 1, 0), (-\frac{5i}{3}, 0, 1))$ et un supplémentaire de H est $\mathrm{Vect}((1, 0, 0))$ (par exemple).

Exercice 12 (★★). Soit $m \in \mathbb{R}$ et $e_1 = (1, 1, 0)$. On pose $F_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = m\}$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1)$.

1. Déterminer les valeurs de m telles que F_m soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

2. Prouver qu'alors $\mathbb{R}^3 = F_m \oplus G$.

Résultat attendu :

1. On montre par analyse-synthèse que seul $m = 0$ convient. Une base de F_0 est $((1, 0, -1), (0, 1, 2))$.
2. N'importe laquelle des caractérisations convient.

Exercice 13 (★). On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, avec $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$ et $G = \text{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que $E = F \oplus G$. Expliciter une base adaptée à cette somme directe.

Résultat attendu : On utilise la caractérisation pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, puis on cherche des bases : $((1, 1, 1))$ est une base de G et $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ est une base de F. Les juxtaposer et montrer qu'on trouve une base de E permet de conclure.

Exercice 14 (★★). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose $F = \text{Vect}(X^2 - X, X^2 + 1)$ et $G = \{P \in E | P(-1) = P'(-1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$ et déterminer une base de E adaptée à cette somme directe.
3. Déterminer la décomposition dans $F \oplus G$ de $R(X) = 4X^2 - 4X + 2$.

Résultat attendu :

1. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
2. $(X^2 - X, X^2 + X)$ est une base de F et $((X + 1)^2)$ est une base de G. On utilise ensuite la caractérisation des supplémentaires par juxtaposition des bases.
3. $R(X) = \Big(2(X^2 - X) + 3(X^2 + X)\Big) - (X + 1)^2$