ECS1 # Exercices: Espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants munis de l'addition et de la multiplication externe usuelles sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = x^2 \text{ et } z = 2x\}$.
2. E_2 est l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $2f(-1) = f(1)$.
3. $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y - z = 0\}$.
4. E_4 est l'ensemble des applications f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$.
5. $E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$.

Exercice 2. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel :

1. L'ensemble $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x - 4y = 0\}$.
2. L'ensemble F_2 des suites réelles qui divergent vers $+\infty$.
3. L'ensemble $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 0\}$.
4. L'ensemble F_4 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$.
5. L'ensemble $F_5 = \{(2x, y+1, -x+y) \text{ avec } (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 3. Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $E_m = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | 2x - y + z - 3t = m\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. Les familles suivantes sont-elles libres dans leurs espaces vectoriels de référence respectifs ?

1. (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (5, -2, -3)$, $e_2 = (4, 1, -3)$ et $e_3 = (-2, 6, 1)$.
2. (h_0, h_1, h_2) où ces trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ par $h_0 : x \longrightarrow 1$, $h_1 : x \longrightarrow e^x$ et $h_2 : x \longrightarrow e^{2x}$.
3. (u, v) avec $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Exercice 5. Soit u, v et w trois suites réelles définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$.

1. La famille (u, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
2. La famille (u, v, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 6. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

1. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$,
2. $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t\}$,
3. $H = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = b = c = d\}$.

Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$; donner une base de chacun d'eux.

Exercice 7. Dans les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E. Si c'est le cas, en donner une base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 2x \text{ et } z = x\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1\}$.

Exercice 8. Soit f et g les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \exp(2x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\exp(2x).$$

On note E l'ensemble des fonctions h telles qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = (ax + b)e^{2x}.$$

1. Prouver que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. La famille (f, g) est-elle une famille libre de E ? une base de E ?
3. Soit φ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3x$. La fonction φ est-elle un élément de E ?