

Exercice 1 (★). Les ensembles suivants munis des opérations usuelles sont-ils des espaces vectoriels sur \mathbb{R} ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2 \text{ et } z = 2x\}$.
2. E_2 est l'ensemble des fonctions f continues sur \mathbb{R} , vérifiant $2f(-1) = f(1)$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y - z = 0\}$.
4. $E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \sin(x) + b \cos(x)\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.
6. E_6 est l'ensemble des fonctions $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y' + e^{-t}y = 0$.

Résultat attendu :

1. Non 2. Oui 3. Oui 4. Oui 5. Non 6. Oui

Exercice 2 (★). Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel :

1. L'ensemble $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4y = 0\}$.
2. L'ensemble F_2 des suites réelles qui divergent vers $+\infty$.
3. L'ensemble $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$.
4. L'ensemble F_4 des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que $f(0) = f(1)$.
5. L'ensemble $F_5 = \{(2x, y + 1, -x + y) \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
6. L'ensemble F_6 des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré exactement n .

Résultat attendu :

1. Oui 2. Non 3. Non 4. Oui 5. Non 6. Non

Exercice 3 (★). Les familles suivantes sont-elles libres dans leurs espaces vectoriels de référence respectifs ?

1. (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (5, -2, -3)$, $e_2 = (4, 1, -3)$ et $e_3 = (-2, 6, 1)$.
2. (h_0, h_1, h_2) où ces trois fonctions sont définies sur \mathbb{R} par $h_0 : x \rightarrow 1$, $h_1 : x \rightarrow e^x$ et $h_2 : x \rightarrow e^{2x}$.
3. (u, v) avec $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Résultat attendu :

1. Oui 2. Oui 3. Non

Exercice 4 (★). Soit u, v et w trois suites réelles définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$.

1. La famille (u, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
2. La famille (u, v, w) est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Résultat attendu : Les deux familles sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 5 (★★). Dans $\mathbb{C}_3[X]$, on donne $P_0(X) = 1 - iX$, $P_1(X) = 1 + X^2$ et $P_2(X) = iX - X^3$. La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle une famille libre dans $\mathbb{C}_3[X]$? génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$?

Résultat attendu : La famille est libre, mais pas génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$.

Exercice 6 (★★). Soit n un entier naturel non nul. Dans l'espace vectoriel $C(\mathbb{R})$ des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on donne $f_0 : x \rightarrow 1$ et pour tout entier naturel non nul k , $f_k : x \rightarrow (\cos x)^k$. La famille (f_0, f_1, \dots, f_n) est-elle une famille libre de $C(\mathbb{R})$?

Résultat attendu : Oui, le calcul nécessite de passer par un polynôme qu'on montre avoir ses coefficients nuls.

Exercice 7 (★). On considère les sous-ensembles de \mathbb{R}^4 suivants :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$,
2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t\}$,
3. $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b = c = d\}$.

Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 ; donner une base de chacun d'eux.

Résultat attendu : Exemples de bases convenant (d'autres peuvent être possibles) :

1. $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$
2. $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1))$
3. $((1, 1, 1, 1))$

Exercice 8 (★). Dans les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E . Si c'est le cas, en donner une base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 2x \text{ et } z = x\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1\}$.

Résultat attendu :

1. Oui, une base est $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
2. Oui, une base est $((1, 2, 1))$.
3. Non, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E (F ne contient pas $(0, 0)$).

Exercice 9 (★★). Montrer que les polynômes $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. En particulier, exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Résultat attendu : La famille est échelonnée en degré donc libre. On montre ensuite que $X^2 = X(X-1) + X$ et $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$, ce qui permet de montrer que la famille est génératrice en revenant à la définition.

Exercice 10 (★★). Soit f et g les fonctions définies par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(2x)$ et $g(x) = x \exp(2x)$. On note E l'ensemble des fonctions h telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (ax + b)e^{2x}$.

1. Prouver que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
2. La famille (f, g) est-elle une famille libre de E ? une base de E ?
3. Soit φ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3x$. La fonction φ est-elle un élément de E ?

Résultat attendu :

1. E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. La famille est constituée de vecteurs de E , libre et génératrice de E , donc c'est une base de E .
3. On montre par l'absurde que $\varphi \notin E$.

Exercice 11 (★★). Soient F, G les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 suivants :

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(b+c, b, c) \in \mathbb{R}^3, (b, c) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Sont-ils supplémentaires?

Résultat attendu : Oui, on le montre par exemple par analyse-synthèse, en exhibant pour tout vecteur de \mathbb{R}^3 une décomposition unique dans $F + G$.

Exercice 12 (★★). Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $F = \text{Vect}(X-1, X)$ et $G = \{P \in E | P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Résultat attendu :

1. G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ donc un espace vectoriel.
2. On montre $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$. Variante : pour tout élément de E on montre qu'il existe une unique décomposition dans $F + G$.

Exercice 13 (★★). Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note P l'ensemble des fonctions paires, et I l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = P \oplus I$.

Résultat attendu : On montre que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E en revenant à la définition. Pour montrer que $E = P \oplus I$, il suffit de montrer que toute fonction $f \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de P et d'un élément de I .

Exercice 14 (★★). Soit E un espace vectoriel et F, G et H des sous-espaces vectoriels de E . Montrer les inclusions :

1. $(F \cap H) + (G \cap H) \subset (F + G) \cap H$
2. $(F \cap G) + H \subset (F + H) \cap (G + H)$

Résultat attendu : Dans les deux cas, il faut se ramener à la définition d'une inclusion d'ensembles, puis traduire étape par étape les informations dont on dispose.