Espérance et variance

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on suppose que $P(X = k) = \ln(a^k)$, où a est un réel strictement positif.

1. Déterminer a pour que X soit une variable aléatoire.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2. Soit $X \sim \mathcal{U}([\![-3, 3]\!])$ et $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à $2n$. Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. On tire au hasard un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire associée au numéro obtenu. Si ce numéro est supérieur ou égal à k alors on note le numéro, sinon on remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton dont on note alors le numéro. Soit Y la variable aléatoire associée au numéro noté.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Pour quelle valeur de k l'espérance de Y est-elle maximale ?

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. Soit $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = a^X$.
2. On pose $Y = \frac{1}{1+X}$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 5. On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat du test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :

— **Méthode 1** On analyse le sang de chacune des N personnes.
— **Méthode 2** On regroupe la population en m groupes de n individus (on a donc $m \times n = N$). On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

1. Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?
2. Soit Y la variable égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n et p.
3. Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000$, $n = 100$ et $p = 0,01$.
   On utilisera l'approximation $0,99^{100} \simeq 0,366$.

Exercice 6. Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes. Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et X désigne la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$.
2. Après ses n recherches, le secrétaire appelle une deuxième fois, et dans les mêmes conditions chacun des $n - k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus.
   (a) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $\ell \in [\![0, n-k]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = \ell | X = k)$.
   (b) Déterminer la loi de Z. On montrera qu'il s'agit d'une loi binomiale, en précisant les paramètres.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![-1, 1]\!]$. On note $Y = X^2$.

1. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Commenter.

Exercice 8. Soit $p \in]0, 1[$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. A chaque instant, elle fait un bond de taille 1 vers la droite ou vers la gauche avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$. A l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n.

1. Soit U une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer une fonction f *simple* telle que $f(U)$ soit une variable aléatoire qui vaut 1 avec probabilité p, et -1 avec probabilité $1 - p$.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que X_n peut être mis sous la forme $X_n = 2S_n - n$, où S_n est une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
3. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
4. Comment se comportent $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque $n \to +\infty$? Interpréter.

Exercice 9. On lance n fois un dé non pipé à six faces. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, déterminer un minorant des valeurs de n pour lesquelles on a plus d'une chance sur deux d'obtenir une fréquence d'apparition de la valeur 1 qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur théorique $\frac{1}{6}$.