Espérance et variance

Exercice 1 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on suppose que $P(X = k) = \ln(a^k)$, où a est un réel strictement positif.

1. Déterminer a pour que X soit une variable aléatoire.
2. Pour cette valeur, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

   Indication : on pourra utiliser sans démonstration la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Résultat attendu : $a = \exp\left(\dfrac{2}{n(n+1)}\right)$, $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$ et $V(X) = \dfrac{(n-1)(n+2)}{18}$.

Exercice 2 (★). Soit $X \sim \mathcal{U}([\![-3, 3]\!])$ et $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Résultat attendu : $Y(\Omega) = \{0, 1, 4, 9\}$, $P(Y = 0) = \dfrac{1}{7}$, $P(Y = 1) = \dfrac{2}{7}$, $P(Y = 4) = \dfrac{2}{7}$, et $P(Y = 9) = \dfrac{2}{7}$. On en déduit $E(Y) = 4$ et $V(Y) = 12$.

Exercice 3 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à $2n$. Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. On tire au hasard un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire associée au numéro obtenu. Si ce numéro est supérieur ou égal à k alors on note le numéro, sinon on remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton dont on note alors le numéro. Soit Y la variable aléatoire associée au numéro noté.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Pour quelle valeur de k l'espérance de Y est-elle maximale ?

Résultat attendu :

1. $X \sim \mathcal{U}([\![1, 2n]\!])$.
2. $Y(\Omega) = [\![1, 2n]\!]$. Si $i \geqslant k$, $P(Y = i) = \dfrac{2n+k-1}{4n^2}$, sinon $P(Y = i) = \dfrac{k-1}{4n^2}$.
3. L'espérance est maximale quand $k = n + 1$.

Exercice 4 (★). Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. Soit $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = a^X$.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculer $E(Y)$.

Résultat attendu : $E(Z) = (ap + 1 - p)^n$, $E(Y) = \dfrac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$.

Exercice 5 (★★). On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat du test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :

— **Méthode 1** On analyse le sang de chacune des N personnes.

— **Méthode 2** On regroupe la population en m groupes de n individus (on a donc $m \times n = N$). On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

1. Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?
2. Soit Y la variable égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n et p.
3. Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000$, $n = 100$ et $p = 0,01$.

   On utilisera l'approximation $0,99^{100} \simeq 0,366$.

Résultat attendu :

1. $X \sim \mathcal{B}(m, 1 - (1-p)^n)$.
2. $E(Y) = \frac{N}{n} + N - N(1-p)^n$.
3. La méthode 1 nécessite 1000 tests (de manière certaine), la méthode 2 en nécessite en moyenne 644 et est donc préférable.

Exercice 6 (★). Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![-1, 1]\!]$. On note $Y = X^2$.

1. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Commenter.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Les variables sont donc décorrélées, mais pas indépendantes.

Exercice 7 (★★). Soit $p \in]0, 1[$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. A chaque instant, elle fait un bond de taille 1 vers la droite ou vers la gauche avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$. A l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n.

1. Soit U une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer une fonction f affine telle que $f(U)$ soit une variable aléatoire qui vaut 1 avec probabilité p, et -1 avec probabilité $1 - p$.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que X_n peut être mis sous la forme $X_n = 2S_n - n$, où S_n est une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
3. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
4. Comment se comportent $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque $n \to +\infty$? Interpréter.

Résultat attendu :

1. La fonction $t \mapsto 2t - 1$ convient
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note : $U_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k\text{-ième bond est vers la droite} \\ 0 & \text{s'il est vers la gauche} \end{cases}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$.
3. $X_n(\Omega) = \{2k - n | k \in [\![0, n]\!]\}$, avec $P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
   De plus, par linéarité, $E(X_n) = n(2p - 1)$, et $V(X_n) = 4np(1 - p)$.
4. $V(X_n)$ tend vers $+\infty$, ce qui est logique : la plage des valeurs possibles de X_n ne fait que s'élargir.
   Pour $E(X_n)$, il y a 3 cas : si $p > \frac{1}{2}$, $E(X_n) \to +\infty$; si $p < \frac{1}{2}$, $E(X_n) \to -\infty$; si $p = \frac{1}{2}$, $E(X_n) = 0$. C'est logique aussi : suivant la valeur de p, la marche aléatoire dévie vers la droite ou vers la gauche.

Exercice 8 (★★). On lance n fois un dé non pipé à six faces. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, déterminer un minorant des valeurs de n pour lesquelles on a plus d'une chance sur deux d'obtenir une fréquence d'apparition de la valeur 1 qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur théorique $\frac{1}{6}$.

Résultat attendu : Le minorant des valeurs de n cherché est $\dfrac{10^5}{36}$.