Exercices: Étude asymptotique des suites

Exercice 1. Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n,$$

$$b_n = n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Exercice 2. Trouver un équivalent de $\ln\left(1 - \sin(\frac{1}{n})\right)$.

Exercice 3. Soit u une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ qui vérifie $\ln\left(\dfrac{2}{u_n}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$. Montrer que u converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $(u_n - \ell)$.

Exercice 4. On donne $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Déterminer un équivalent de $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Exercice 5. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $n^2 + \dfrac{3n+1}{n^2} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) + o\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$.
2. $\dfrac{3n+4}{n^2} + \dfrac{1}{e^n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. $\dfrac{3n+n^2}{n^2} + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 6. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $b > 0$. On considère la suite u qui vérifie $u_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Est-elle monotone à partir d'un certain rang ?

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Montrer que si $\alpha = 2$, la suite (u_n) est divergente.
2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$, la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 8 (Adapté d'un oral ESCP-2006)**.** On se propose d'étudier l'ensemble A des suites réelles vérifiant pour tout entier naturel n, la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n + (-1)^n.$$

1. Montrer qu'il existe un réel α que l'on déterminera, tel que la suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha.n.(-1)^n$, soit élément de A.
2. Montrer que u appartient à A si et seulement si la suite $v = u - w$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.
3. Dans ce cas, calculer v_n en fonction de v_0, v_1 et n, puis en fonction de u_0, u_1 et n. En déduire u_n en fonction de u_0, u_1 et n, et donner un équivalent simple de u_n dans le cas où u_0 et u_1 sont positifs.

Tourner la page

Exercice 9. (Adapté d'EDHEC 2016, voie E, exercice 2)

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. (a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.
   (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel de $[n, +\infty[$, noté u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) Utiliser la question 2b) pour compléter les commandes Scilab suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0
while -------
n= ------
end
disp(n)
```

   (b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$.
4. (a) On pose $v_n = u_n - n$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.
   (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$.
   (c) Vérifier ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}})$.
   (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que $u_n - n \sim_{+\infty} e^{-\sqrt{n}}$.