Étude de suites

Exercice 1 (★). Déterminer le comportement asymptotique (convergence/divergence, limite éventuelle) des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $a_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$
2. $b_n = \left((-1)^n + n^3\right) e^{-n}$
3. $c_n = \left((-1)^n + e^{-n}\right) n^3$
4. $d_n = (\cos(n) + 3)\ln(n)$
5. $e_n = \dfrac{3n+1}{2n^2-1}$
6. $f_n = \dfrac{2n^2+3^n+1}{5n^2+4n-2}$
7. $g_n = \dfrac{(\ln(n))^2-2}{\ln(n)+n}$
8. $h_n = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}n) - 3n}{n+3}$
9. $i_n = \dfrac{(-1)^n + 2n}{n^2}$
10. $j_n = n^2\left(1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)\right)$
11. $k_n = n^2\left(\dfrac{11}{10} + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)\right)$
12. $\ell_n = n\left(2 + \cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)\right) - \sqrt{n}$

Résultat attendu :

1. Converge vers 0
2. Converge vers 0
3. Diverge
4. Diverge vers $+\infty$
5. Converge vers 0
6. Diverge vers $+\infty$
7. Converge vers 0
8. Converge vers -3
9. Converge vers 0
10. Diverge
11. Diverge vers $+\infty$
12. Diverge vers $+\infty$

Exercice 2 (★). Démontrer que la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left((-1)^n - \dfrac{3}{n}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi n}{7}\right)$ est bornée.

Résultat attendu : Un calcul direct donne une minoration par -4 et une majoration par 4.

Exercice 3 (★★). Démontrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \times \dfrac{n^2+1}{n^2+2} + 3e^{-n} - 10\sin(n)$ est bornée.

Résultat attendu : Un calcul direct donne une minoration par -10 et une majoration par 14. On peut aussi utiliser les propriétés des suites convergentes, qui donnent l'existence d'un majorant sans fournir sa valeur.

Exercice 4 (★). Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $v_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n(1-v_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0,1]$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Résultat attendu : La suite v est décroissante, convergente et converge vers 0.

Exercice 5 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3+k^3}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.

Résultat attendu : On montre par théorème d'encadrement que v converge vers 0.

Exercice 6 (★). Démontrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(\frac{\pi k^2}{7}) + 2}{2^k}$ est convergente.

Résultat attendu : On montre que u est croissante et majorée, donc convergente.

Exercice 7 (★★). Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout n entier non nul par : $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Montrer que pour tout n non nul, $u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Résultat attendu :

1. La suite est décroissante et minorée, donc converge.
2. On simplifie l'expression puis majore la somme obtenue.
3. On complète l'inégalité de la question précédente pour obtenir un encadrement de $u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n$, puis on passe à la limite dans cet encadrement. La suite u converge vers 0.

Exercice 8 (★★★). On définit les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $b_0 > a_0 > 0$ et les relations suivantes, vérifiées pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles convergent vers un même réel ℓ.

Résultat attendu : On montre séparément la convergence des deux suites, puis on passe à la limite dans la deuxième relation de récurrence.

Exercice 9 (★★). Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les trois suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite u converge.
Résultat attendu : On utilise la limite de $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour montrer que celles de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales. On conclut ensuite par propriété de cours.

Exercice 10 (★★). Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.
Indication : on pourra commencer par étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
Résultat attendu : On montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite. La convergence de u en découle.

Exercice 11 (★). Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de u_n en fonction de n.
Résultat attendu : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n + 1$.

Exercice 12 (★★). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n + 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de u_n en fonction de n.
Résultat attendu : Si $\lambda \neq 1$, $u_n = \lambda^n \left(2 - \frac{3}{1-\lambda}\right) + \frac{3}{1-\lambda}$. Si $\lambda = 1$, $u_n = 2 + 3n$.

Exercice 13 (★). Pour chacune des suites suivantes, exprimer le terme général de la suite en fonction de n :

1. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$, $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = -u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+2} = -v_{n+1} - v_n$, $v_0 = 1$ et $v_1 = -1$.

Résultat attendu : Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = 2^n - 1, \qquad u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-3n+1), \qquad v_n = \cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Exercice 14 (★★). Dans chacune des situations suivantes, déterminer la limite de la suite étudiée.

1. u est une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n + \frac{1}{3}$.
2. v est une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}v_n$.
3. w est une suite telle que $\forall n \geqslant 3$, $\left|w_{n+1} - \sqrt{5}\right| \leqslant (e-2)\left|w_n - \sqrt{5}\right|$.

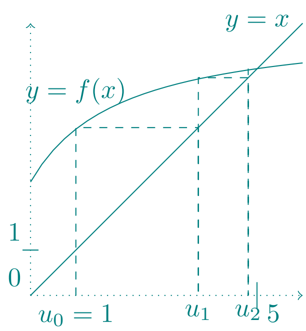
Résultat attendu : u diverge vers $+\infty$, v converge vers 0, w converge vers $\sqrt{5}$.
Pour le montrer, il faut exploiter les relations de récurrence fournies, de manière à établir des inégalités reliant le n-ième terme de la suite et son premier terme. On exploite ensuite ces inégalités avec un théorème d'encadrement ou de comparaison.

Exercice 15 (★). Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{6u_n + 5}{u_n + 2}$.

1. Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$. En déduire que la suite est bien définie, et tracer la représentation des réels u_0, u_1 et u_2.
2. Étudier la monotonie et les bornes éventuelles de la suite u.
3. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Résultat attendu :

1. L'étude de f montre que $\mathbb{R}_+$ est stable par f, donc la suite u est bien définie.



2. La suite u est croissante et majorée (par 5 ou 6 suivant le choix de raisonnement).
3. La convergence est donnée par la question précédente, puis le calcul se fait par théorème du point fixe. La suite u converge vers 5.

Exercice 16 (★★★). Déterminer le comportement en $+\infty$ de la suite u définie par le premier terme $u_0 \geqslant 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Résultat attendu : Si $u_0 \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, la suite u est croissante et majorée. Sinon, elle est décroissante et minorée. Dans les deux cas, elle converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.