Exercices: Étude globale d'une fonction sur un intervalle

Exercice 1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des applications paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie pour $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$. La fonction f est-elle majorée ? minorée ?

Exercice 3. Soit f une application continue et périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. La fonction φ définie par $\begin{cases} \varphi(t) & = & \dfrac{(\sin t)\ln(1+t)}{t^2} \quad \text{pour } t \neq 0 \\ \varphi(0) & = & 1 \end{cases}$ est-elle continue sur $]-1; +\infty[$?

Exercice 5. Pour chacune des fonctions f suivantes, étudier la continuité de f sur son ensemble de définition :

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ pour $x \leqslant 0$ et $f(x) = 1 + \ln(x+1)$ pour $x > 0$.
2. $f(x) = x \lfloor x \rfloor$.
3. $f(x) = x^2$ si $\lfloor x \rfloor$ est un nombre impair et $f(x) = x$ si $\lfloor x \rfloor$ est un nombre pair, pour $x \in]-1; +4[$.
4. $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x}$ pour x non nul et $f(0) = 0$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{2x} - 5$.

1. Déterminer l'intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que f soit une bijection de $\mathbb{R}$ sur J.
2. Donner l'expression algébrique de $f^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x \in J$.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Déterminer l'intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que f soit une bijection de $\mathbb{R}$ sur J.
2. Donner l'expression algébrique de $f^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x \in J$.

Exercice 8. Montrer que l'équation $e^{-x^2} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9. Soit f continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 10 (Histoire d'eau)**.** Un robinet laisse échapper sans discontinuité de l'eau dans un bassin de 120 litres, initialement vide. Le débit d'eau peut cependant varier au cours du temps. Le bassin est rempli au bout d'une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'exactement une demi-heure pendant lequel il s'écoule exactement 60 litres d'eau.

Exercice 11. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0; 1]$ et telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe une valeur de $c \in [0; 1]$ telle que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on considère la fonction g_n définie sur un intervalle à déterminer par

$$g_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

   et on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right)$.

   (a) Soit $n \geqslant 2$, calculer H_n.

   (b) En déduire l'existence, pour tout $n \geqslant 2$, d'un nombre réel $c_n \in [0; 1]$ tel que $f\left(c_n + \dfrac{1}{n}\right) = f(c_n)$.