Exercices: Extrema et convexité

Exercice 1. Étudier les bornes de la fonction définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

Exercice 2. Étudier les bornes de la fonction définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = \left(x(x-1)^2\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Exercice 3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a(a+b) > 0$. Étudier les bornes de la fonction définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = \frac{bx}{x^2 + a(a+b)}.$$

Exercice 4. Préciser la convexité de la fonction ln et de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$.

Exercice 5. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où les fonctions suivantes sont convexes et préciser les points d'inflexion.

1. $f : x \to \frac{x^3}{x^2+12}$.
2. $g : x \to |x|$.

Exercice 6. Prouver que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$.
2. Pour tout $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $2u \leqslant \pi \sin(u)$.

Exercice 7. Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.
2. $\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(u) \leqslant u$.

Exercice 8. Pour tous réels a et b strictement supérieurs à 1, comparer

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ et } \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Exercice 9 (Moyenne arithmétique et moyenne géométrique)**.** Soit $n \geqslant 1$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.Comparer

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$