

Exercice 1 (★). Représenter graphiquement les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 . Lesquels sont des ouverts ? Aucune justification n'est demandée.

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $A = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ | 2. $B = [0, 1] \times [0, 1]$ | 3. $C =]0, 1[\times]0, 1[$ |
| 4. $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ | 5. $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ | 6. $F =]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$ |
| 7. $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ | 8. $H = (\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}) \times \mathbb{R}_+^*$ | 9. $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$ |

Résultat attendu :

- | | | |
|-----------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. A est un ouvert. | 2. B n'est pas un ouvert. | 3. C est un ouvert. |
| 4. D est un ouvert. | 5. E n'est pas un ouvert. | 6. F est un ouvert. |
| 7. G est un ouvert. | 8. H est un ouvert. | 9. I n'est pas un ouvert. |

Exercice 2 (★). On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = xy$.

- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- Déterminer les lignes de niveau de f .

Résultat attendu :

- Elle est continue sur \mathbb{R}^2 car c'est un polynôme.
- Les lignes de niveau sont pour $k = 0$ la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $y = 0$, pour $k \in \mathbb{R}^*$ les courbes d'équation $y = \frac{k}{x}$ (pour $x \in \mathbb{R}^*$).

Exercice 3 (★). Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur U et calculer leurs dérivées partielles. (On ne demande pas de justifier que U est ouvert)

- $\forall (x, y) \in U = \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + 3x^2y - xy + y^2$.
- $\forall (x, y) \in U = \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y)(1 - 2x - 2y)$.
- $\forall (x, y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.
- $\forall (x, y) \in U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$.
- $\forall (x, y) \in U = \mathbb{R}^2, f(x, y) = xy e^{-x^2 - y^2}$.
- $\forall (x, y) \in U =]0, +\infty[\times]1, +\infty[, f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$.
- $\forall (x, y) \in U = \mathbb{R}^2, f(x, y) = e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$.

Résultat attendu : La classe C^1 se justifie en partant de polynômes, puis grâce aux opérations usuelles.

- $\forall (x, y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 6xy - y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - x + 2y$.
- $\forall (x, y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 - 4x - 4y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - 4x - 4y$.
- $\forall (x, y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2 + y^2)^2}$.
- $\forall (x, y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \ln(x) + 2x + y^2 + 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$.
- $\forall (x, y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1 - 2x^2)e^{-x^2 - y^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1 - 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$.
- $\forall (x, y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}\ln(y)}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\sqrt{x}}{y\ln(y)^2}$.
- $\forall (x, y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2) + e^{xy} \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2) + e^{xy} \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$.

Exercice 4 (★). Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et qui vérifie $\forall t \in \mathbb{R}, f(t, t^2) = 1$. En utilisant la règle de la chaîne, montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Résultat attendu : Appliquer la formule puis prendre le cas particulier $t = 0$ donne directement le résultat.

Exercice 5 (★★). Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = e^{xy^2}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $x(t) = t \cos(t)$ et $y(t) = t \sin(t)$. Montrer que $\varphi : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée en utilisant la règle de la chaîne.

Résultat attendu : On trouve $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = t^2 \sin(t) e^{t^3 \cos(t) \sin^2(t)} (3 \sin(t) \cos(t) + 2t \cos^2(t) - t \sin^2(t))$.

Exercice 6 (★). Soit $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , pour laquelle on donne les valeurs suivantes :

$$f(-1, 3) = 7, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 3) = -5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 3) = 4.$$

Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(u, v) = f(5u + 3v - 1, 8u - 6v + 3)$. Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et déterminer les valeurs de $\frac{\partial g}{\partial u}(0, 0)$ et $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0)$.

Résultat attendu : Les formules de composition donnent $\frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = 7$ et $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = -39$.

Exercice 7 (★★). On s'intéresse aux fonctions f définies de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

1. Soit f une fonction de classe C^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $u = x + y$, $v = x + 2y$ et :

$$g(u, v) = g(x + y, x + 2y) = f(x, y).$$

Étudier la dérivabilité de la fonction g sur \mathbb{R}^2 .

- Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en fonction de u , v et des dérivées partielles de g .
- En déduire l'ensemble des fonctions f qui satisfont les conditions de l'énoncé.

Résultat attendu :

- Exprimer $g(u, v)$ en fonction de f , u et v permet de montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + 2 \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$.
- Les fonctions f qui satisfont les conditions de l'énoncé sont celles pour lesquelles il existe $F \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = F(x + 2y)$.

Exercice 8 (★). Déterminer les points critiques de la fonctions f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy(x + y - 1).$$

Résultat attendu : Les points critiques sont $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Exercice 9 (★). Déterminer les points critiques de la fonctions f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)}.$$

Résultat attendu : Les points critiques sont $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Exercice 10 (★). On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

- Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f .
- Déterminer un équivalent de $f(x, x) - f(0, 0)$ et de $f(x, 0) - f(0, 0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0, 0)$?

Résultat attendu :

- Il suffit de faire le calcul des dérivées partielles en $(0, 0)$.
- $f(x, x) - f(0, 0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x^4$ et $f(x, 0) - f(0, 0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x^2$, l'étude des signes montre donc que f ne présente pas d'extremum en $(0, 0)$.

Exercice 11 (★). Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$.

- Déterminer l'unique point critique de f , puis son image par f .
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, développer l'expression $E = 3 \left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.
- Que peut-on en conclure sur la nature du point critique ?

Résultat attendu :

- L'unique point critique est $(-\frac{1}{2}, 1)$ et $f(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{5}{4}$.
- $E = f(x, y) + \frac{5}{4}$.
- f admet un minimum global en $(-\frac{1}{2}, 1)$ qui vaut $-\frac{5}{4}$.

Exercice 12 (★★). Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$.

- Justifier que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
- (a) Déterminer les dérivées partielles de f .
(b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
- (a) Montrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq xe^x$.

- (b) En étudiant la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2.b) est un extremum global de f sur \mathbb{R}^2 .

Résultat attendu :

1. On raisonne par opérations sur des fonctions de classe C^1 .
2. (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1 + x(y^2 + 1))e^{x(y^2 + 1)}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2yx^2e^{x(y^2 + 1)}$.
(b) Il suffit de résoudre le système.
3. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on part de $y^2 + 1 \geq 1$, puis on utilise les propriétés du produit et de la composée.
(b) L'étude des variations de g donne un minimum en -1 qui vaut $-e^{-1}$. Le calcul de $f(A)$ permet ensuite de conclure.