Fonctions de deux variables

Exercice 1 (★). Représenter graphiquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$. Lesquels sont des ouverts ? Aucune justification n'est demandée.

1. $A = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
2. $B = [0,1] \times [0,1]$
3. $C =]0,1[\times]0,1[$
4. $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
5. $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
6. $F =]1,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$
7. $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
8. $H = (\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}) \times \mathbb{R}_+^*$
9. $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \geqslant 1\}$

Résultat attendu :

1. A est un ouvert.
2. B n'est pas un ouvert.
3. C est un ouvert.
4. D est un ouvert.
5. E n'est pas un ouvert.
6. F est un ouvert.
7. G est un ouvert.
8. H est un ouvert.
9. I n'est pas un ouvert.

Exercice 2 (★). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les lignes de niveau de f.

Résultat attendu :

1. Elle est continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est un polynôme.
2. Les lignes de niveau sont pour $k=0$ la droite d'équation $x=0$ et la droite d'équation $y=0$, pour $k \in \mathbb{R}^*$ les courbes d'équation $y = \frac{k}{x^2}$ (pour $x \in \mathbb{R}^*$).

Exercice 3 (★). Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur U et calculer leurs dérivées partielles. (On ne demande pas de justifier que U est ouvert)

1. $\forall(x,y) \in U = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 + 3x^2y - xy + y^2$.
2. $\forall(x,y) \in U = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+y)(1-2x-2y)$.
3. $\forall(x,y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
4. $\forall(x,y) \in U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ f(x,y) = x\left(\ln(x) + x + y^2\right)$.
5. $\forall(x,y) \in U = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.
6. $\forall(x,y) \in U =]0,+\infty[\times]1,+\infty[,\ f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$.
7. $\forall(x,y) \in U = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = e^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$.

Résultat attendu : La classe C^1 se justifie en partant de polynômes, puis grâce aux opérations usuelles.

1. $\forall(x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 6xy - y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - x + 2y$.
2. $\forall(x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - 4x - 4y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - 4x - 4y$.
3. $\forall(x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}$.
4. $\forall(x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(x) + 2x + y^2 + 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$.
5. $\forall(x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}$.
6. $\forall(x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}\ln(y)},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\sqrt{x}}{y\ln(y)^2}$.
7. $\forall(x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2x}{1+x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2y}{1+x^2+y^2}$.

Exercice 4 (★). Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et qui vérifie $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t,t^2) = 1$. En utilisant la règle de la chaîne, montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Résultat attendu : Appliquer la formule puis prendre le cas particulier $t=0$ donne directement le résultat.

Exercice 5 (★★). Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = e^{xy^2}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $x(t) = t\cos(t)$ et $y(t) = t\sin(t)$. Montrer que $\varphi\ : t \mapsto f(x(t),y(t))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en utilisant la règle de la chaîne.

Résultat attendu : On trouve $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = t^2\sin(t)e^{t^3\cos(t)\sin^2(t)}\left(3\sin(t)\cos(t) + 2t\cos^2(t) - t\sin^2(t)\right)$.

Exercice 6 (★). Soit $(x,y)\mapsto f(x,y)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, pour laquelle on donne les valeurs suivantes : $f(-1,3)=7$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,3)=-5$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,3)=4$.
Pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, on pose $g(u,v)=f(5u+3v-1,8u-6v+3)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les valeurs de $\dfrac{\partial g}{\partial u}(0,0)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}(0,0)$.
Résultat attendu : Les formules de composition donnent $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0)=7$ et $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)=-39$.

Exercice 7 (★★). On s'intéresse aux fonctions f définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

1. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $u=x+y$, $v=x+2y$ et $g(u,v)=g(x+y,x+2y)=f(x,y)$. Étudier la dérivabilité de la fonction g sur $\mathbb{R}^2$.
2. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en fonction de u, v et des dérivées partielles de g.
3. En déduire l'ensemble des fonctions f qui satisfont les conditions de l'énoncé.

Résultat attendu :

1. Exprimer $g(u,v)$ en fonction de f, u et v permet de montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$.
3. Les fonctions f qui satisfont les conditions de l'énoncé sont celles pour lesquelles il existe $F\in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=F(x+2y)$.

Exercice 8 (★). Déterminer les points critiques de la fonctions f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=xy(x+y-1).$$

Résultat attendu : Les points critiques sont $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Exercice 9 (★). Déterminer les points critiques de la fonctions f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=xye^{-(x^2+y^2)}.$$

Résultat attendu : Les points critiques sont $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Exercice 10 (★). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$.

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f.
2. Déterminer un équivalent de $f(x,x)-f(0,0)$ et de $f(x,0)-f(0,0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0,0)$?

Résultat attendu :

1. Il suffit de faire le calcul des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. $f(x,x)-f(0,0)\underset{x\to 0}{\sim}2x^4$ et $f(x,0)-f(0,0)\underset{x\to 0}{\sim}-2x^2$, l'étude des signes montre donc que f ne présente pas d'extremum en $(0,0)$.

Exercice 11 (★). Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=9x^2+8xy+3y^2+x-2y$.

1. Déterminer l'unique point critique de f, puis son image par f.
2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, développer l'expression $E=3\left(y+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.
3. Que peut-on en conclure sur la nature du point critique ?

Résultat attendu :

1. L'unique point critique est $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ et $f\left(-\frac{1}{2},1\right)=-\frac{5}{4}$.
2. $E=f(x,y)+\frac{5}{4}$.
3. f admet un minimum global en $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ qui vaut $-\frac{5}{4}$.

Exercice 12 (★★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer les dérivées partielles de f.
   (b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
3. (a) Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant xe^x$.
   (b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2.b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Résultat attendu :

1. On raisonne par opérations sur des fonctions de classe C^1.
2. (a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 + x(y^2+1))e^{x(y^2+1)},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx^2e^{x(y^2+1)}$.
   (b) Il suffit de résoudre le système.
3. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on part de $y^2 + 1 \geqslant 1$, puis on utilise les propriétés du produit et de la composée.
   (b) L'étude des variations de g donne un minimum en -1 qui vaut $-e^{-1}$. Le calcul de $f(A)$ permet ensuite de conclure.

Exercice 13 (Type DS)**.** On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x + 1 + 2e^x$, ainsi que la fonction f de deux variables réelles x et y définie $f(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x)$.

1. Étudier les variations de g et donner les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier l'existence d'une asymptote au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de g par rapport à cette asymptote.
3. Déduire des variations de g l'existence d'un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$, puis montrer qu'il se trouve dans l'intervalle $[-2, -1]$.
   Indication : on rappelle que $e \approx 2,7$.
4. Déterminer le seul point critique de f.
5. Montrer qu'il s'agit d'un extremum global.

Résultat attendu :

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + 2e^x > 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Des calculs directs de limite donnent ensuite $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
2. La définition de g donne directement que $g(x) \underset{x\to-\infty}{=} x + 1 + o(1)$. Donc g possède une asymptote d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $-\infty$.
   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) - x - 1 = 2e^x > 0$, donc la courbe représentative de g est au dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$.
3. D'après la question 1, la fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique α réel tel que $g(\alpha) = 0$.
   Par ailleurs, $g(-2) \approx -1 + \frac{2}{(2,7)^2} \leqslant 0$ et $g(-1) = 2e - 1 \geqslant 0$. Donc $g(-2) \leqslant g(\alpha) \leqslant g(-1)$. Or g^{-1} est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$ (par conséquence du théorème de la bijection). Donc $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$.
4. La fonction $(x, y) \mapsto x$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et la fonction $u \mapsto e^u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition, on en déduit que $(x, y) \mapsto e^x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
   De plus, la fonction $(x, y) \mapsto x + y^2$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Par somme et produit, on en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Déterminons ses dérivées partielles d'ordre 1 : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x) + e^x(1 + e^x) = e^x(x + y^2 + 1 + 2e^x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^x.$$
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce point est un point critique de f si et seulement si :
   $$\begin{cases} e^x(x + y^2 + 1 + 2e^x) = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases}.$$
   Le seul point critique de f est donc $(\alpha, 0)$.
5. Soit $\beta = f(\alpha, 0) = e^\alpha(\alpha + e^\alpha)$. En posant $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x(x + e^x)$, on a :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi(x) + y^2e^x \geqslant \varphi(x).$$
   Or la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x g(x)$. Donc φ' est du signe de g, donc φ admet un minimum en α valant β. Ainsi :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geqslant \varphi(x) \geqslant \varphi(\alpha) = \beta = f(\alpha, 0).$$
   Donc f admet un minimum global en $(\alpha, 0)$.