Exercices PCSI
É.Bouchet

Généralités sur les fonctions réelles

Exercice 1 (★). Donner l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

1. $f : x \mapsto \sqrt{1+e^x}$
2. $f : x \mapsto (e^{3x}+3x^2)^4$
3. $f : x \mapsto \left(\cos^2(x)+\frac{3}{2}\right)\sin(2x)$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$
5. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)-1}$
6. $f : x \mapsto \ln\big(\ln(x)\big)$
7. $f : x \mapsto \left(e^{3x}-x\right)^4$
8. $f : x \mapsto x\ln(x^2-3)$
9. $f : x \mapsto \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
10. $f : x \mapsto \sqrt{e^{x^2}+2}$
11. $f : x \mapsto \frac{\big(\ln(x)\big)^4}{x}$
12. $f : x \mapsto (x^3+x-2)^4$
13. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
14. $f : x \mapsto \sin(x^2)$
15. $f : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$
16. $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$
17. $f : x \mapsto xe^{\cos(x)}$

Exercice 2 (★). Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer (en fonction de f') la dérivée des fonctions suivantes (en précisant l'ensemble de dérivabilité) :

1. $u_1 : x \mapsto f(3-2x)$
2. $u_2 : x \mapsto f(e^x)$
3. $u_3 : x \mapsto \big(f(x)\big)^2$
4. $u_4 : x \mapsto f(x^2)$
5. $u_5 : x \mapsto f(\sqrt{x})$
6. $u_6 : x \mapsto \frac{1}{f(\ln(x))}$
7. $u_7 : x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$
8. $u_8 : x \mapsto \sin(f(\sin(x)))$
9. $u_9 : x \mapsto f(e^{f(x)})$

Exercice 3 (★). Soit $r \in \mathbb{R}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la dérivée n-ième de $f : t \mapsto e^{rt}+e^{-rt}$.

Exercice 4 (★). Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

Exercice 5 (★). On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2)\sqrt{x-1} \end{array}$.

1. f est-elle dérivable en 1 ?
2. Trouver la valeur $\beta \in \mathbb{R}$ la plus grande possible telle que $\forall x \geqslant 1$, $(x-2)\sqrt{x-1} \geqslant \beta$.

Exercice 6 (★★). Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$
2. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$
3. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$
4. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$

Exercice 7 (★). Déterminer la limite de :

1. $\frac{\arctan(t)}{t}$ quand $t \to 0$
2. $\frac{s}{e^s-1}$ quand $s \to 0$
3. $\frac{\ln(1+u)}{u}$ quand $u \to 0$
4. $\frac{1-\cos(t)}{t}$ quand $t \to 0$
5. $\frac{3x}{\sin(x)}$ quand $x \to 0$
6. $\frac{\ln(1+2s^2)}{s}$ quand $s \to 0$
7. $\frac{e^{\sin(u)}-\cos(2u)}{u}$ quand $u \to 0$

Exercice 8 (★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2^{(x^2)} = 3^{(x^3)}$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Exercice 9 (★★). Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 10 (★). Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(t^4)}{t}$
2. $\lim\limits_{a\to 0} \tan(a)e^a$
3. $\lim\limits_{r\to+\infty} (3r^2-e^{2r}+2)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}(3+x^3)$
5. $\lim\limits_{s\to 0^+} \sqrt{s}^{(s^2)}$
6. $\lim\limits_{u\to 0} \frac{u^3}{\cos^2(u)}$
7. $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(\ln(t))}{\ln t}$
8. $\lim\limits_{y\to-\infty} y^2e^y$
9. $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{\sin(t)}{t}$
10. $\lim\limits_{t\to+\infty} (-2t+(\ln(t))^3+2\sqrt{t})$
11. $\lim\limits_{a\to 0^+} \tan^2(a)\ln(\sin(a))$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^4)}{x}$

Exercice 11 (★★). Étudier la fonction h définie par $h(x) = |x-3| - \dfrac{2}{x-1}$ sur un ensemble de définition à déterminer. Tracer sa courbe représentative en précisant les tangentes aux points remarquables.

Exercice 12 (★★). Soit $\lambda > 0$ et soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto e^{\lambda t}$. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x$$

1. Réécrire cette équation à l'aide de la fonction f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Montrer que x est solution de (E).
3. En remarquant que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que réciproquement, si x est solution de (E), alors $f(x) = x$.
4. Étudier les variations de la fonction $g : t \mapsto f(t) - t$.
5. En déduire, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation (E).

Exercice 13 (★). Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants.

1. $z_1 = 1 + 2i$
2. $z_2 = -\dfrac{3}{2} - i$

Exercice 14 (★★).

1. Montrer que pour tout $s \in [-1, 1]$, $\arccos(s) + \arcsin(s) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Montrer que si $t \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$ vaut $\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } t > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$