

Exercice 1 (★). Donner l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $f : x \mapsto \sqrt{1 + e^x}$ | 2. $f : x \mapsto (e^{3x} + 3x^2)^4$ | 3. $f : x \mapsto \left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right) \sin(2x)$ |
| 4. $f : x \mapsto \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$ | 5. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x) - 1}$ | 6. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ |
| 7. $f : x \mapsto (e^{3x} - x)^4$ | 8. $f : x \mapsto x \ln(x^2 - 3)$ | 9. $f : x \mapsto \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$ |
| 10. $f : x \mapsto \sqrt{e^{x^2} + 2}$ | 11. $f : x \mapsto \frac{(\ln(x))^4}{x}$ | 12. $f : x \mapsto (x^3 + x - 2)^4$ |
| 13. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ | 14. $f : x \mapsto \sin(x^2)$ | 15. $f : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)$ |
| 16. $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x) + 2}}$ | 17. $f : x \mapsto xe^{\cos(x)}$ | |

Résultat attendu :

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}$ | 2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 12(e^{3x} + 2x)(e^{3x} + 3x^2)^3$ |
| 3. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(2x)(2\cos^2(x) + 3) - \sin^2(2x)$ | 4. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3}$ |
| 5. $\forall x \in]e, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x) - 1}}$ | 6. $\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ |
| 7. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4(3e^{3x} - 1)(e^{3x} - x)^3$ | 8. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], f'(x) = \ln(x^2 - 3) + \frac{2x^2}{x^2 - 3}$ |
| 9. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, f'(x) = \frac{e^{x-\frac{1}{x}}(x^2 - \frac{1}{x^2} - 2x)}{(x^2 - 1)^2}$ | 10. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2} + 2}}$ |
| 11. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{4(\ln(x))^3 - (\ln(x))^4}{x^2}$ | 12. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4(3x^2 + 1)(x^3 + x - 2)^3$ |
| 13. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], f'(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{(1+x)^2}$ | 14. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x \cos(x^2)$ |
| 15. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 0], f'(x) = \frac{-2 \cos(\ln(1 + \frac{2}{x}))}{x(x+2)}$ | 16. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1 + 2 \sin(x)}{(\sqrt{\sin(x) + 2})^3}$ |
| 17. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{\cos(x)}(1 - x \sin(x))$ | |

Exercice 2 (★). Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* . Calculer (en fonction de f') la dérivée des fonctions suivantes (en précisant l'ensemble de dérivabilité) :

- | | | |
|---|---------------------------------------|--|
| 1. $u_1 : x \mapsto f(3 - 2x)$ | 2. $u_2 : x \mapsto f(e^x)$ | 3. $u_3 : x \mapsto (f(x))^2$ |
| 4. $u_4 : x \mapsto f(x^2)$ | 5. $u_5 : x \mapsto f(\sqrt{x})$ | 6. $u_6 : x \mapsto \frac{1}{f(\ln(x))}$ |
| 7. $u_7 : x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$ | 8. $u_8 : x \mapsto \sin(f(\sin(x)))$ | 9. $u_9 : x \mapsto f(e^{f(x)})$ |

Résultat attendu :

- | | |
|--|---|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, u_1'(x) = -2f'(3 - 2x)$ | 2. $\forall x \in \mathbb{R}, u_2'(x) = e^x f'(e^x)$ |
| 3. $\forall x \in \mathbb{R}, u_3'(x) = 2f'(x)f(x)$ | 4. $\forall x \in \mathbb{R}, u_4'(x) = 2xf'(x^2)$ |
| 5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, u_5'(x) = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ | 6. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, u_6'(x) = -\frac{f'(\ln(x))}{x(f(\ln(x)))^2}$ |
| 7. $\forall x \in \mathbb{R}^*, u_7'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ | 8. $\forall x \in \mathbb{R}, u_8'(x) = \cos(x)f'(\sin(x))\cos(f(\sin(x)))$ |
| 9. $\forall x \in \mathbb{R}, u_9'(x) = f'(x)e^{f(x)}f'(e^{f(x)})$ | |

Exercice 3 (★). Soit $r \in \mathbb{R}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la dérivée n -ième de $f : t \mapsto e^{rt} + e^{-rt}$.
Résultat attendu : On montre par récurrence que $\forall t \in \mathbb{R}, f^{(n)}(t) = r^n e^{rt} + (-r)^n e^{-rt}$.

Exercice 4 (★). Montrer que pour tout $x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x)$.

Résultat attendu : On se ramène à l'étude de la fonction $f : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x)$ sur \mathbb{R}_+^* , en cherchant à montrer qu'elle est négative.

Exercice 5 (★). On considère la fonction $f : \begin{matrix} [1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2)\sqrt{x-1} \end{matrix}$.

1. f est-elle dérivable en 1 ?

2. Trouver la valeur $\beta \in \mathbb{R}$ la plus grande possible telle que $\forall x \geq 1, (x-2)\sqrt{x-1} \geq \beta$.

Résultat attendu :

1. Une étude de taux d'accroissement montre que f n'est pas dérivable en 1.
2. On trouve par étude de fonction que $\beta = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Exercice 6 (★★). Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$
2. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
3. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$
4. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \left| \sqrt{a} - \sqrt{b} \right| \leq \sqrt{|a-b|}$

Résultat attendu : Dans chacun des cas, on raisonne par équivalences jusqu'à se ramener à une inégalité qu'on sait être toujours vraie. Des disjonctions de cas peuvent aussi être nécessaires.

Exercice 7 (★). Déterminer la limite de :

1. $\frac{\arctan(t)}{t}$ quand $t \rightarrow 0$
2. $\frac{s}{e^s - 1}$ quand $s \rightarrow 0$
3. $\frac{\ln(1+u)}{u}$ quand $u \rightarrow 0$
4. $\frac{1 - \cos(t)}{t}$ quand $t \rightarrow 0$
5. $\frac{3x}{\sin(x)}$ quand $x \rightarrow 0$
6. $\frac{\ln(1+2s^2)}{s}$ quand $s \rightarrow 0$
7. $\frac{e^{\sin(u)} - \cos(2u)}{u}$ quand $u \rightarrow 0$

Résultat attendu : Les calculs se font à l'aide de taux d'accroissements.

1. 1
2. 1
3. 1
4. 0
5. 3
6. 0
7. 1

Exercice 8 (★). Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $2^{(x^2)} = 3^{(x^3)}$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Résultat attendu :

1. $x = 0$ ou $x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$
2. $x = 1$ ou $x = 4$

Exercice 9 (★★). Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Résultat attendu : On se ramène à l'étude des variations d'une fonction bien choisie.

Exercice 10 (★). Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t^4)}{t}$
2. $\lim_{a \rightarrow 0} \tan(a)e^a$
3. $\lim_{r \rightarrow +\infty} (3r^2 - e^{2r} + 2)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x}(3 + x^3)$
5. $\lim_{s \rightarrow 0^+} \sqrt{s}^{(s^2)}$
6. $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3}{\cos^2(u)}$
7. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(t))}{\ln t}$
8. $\lim_{y \rightarrow -\infty} y^2 e^y$
9. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\sin(t)}{t}$
10. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-2t + (\ln(t))^3 + 2\sqrt{t})$
11. $\lim_{a \rightarrow 0^+} \tan^2(a) \ln(\sin(a))$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^4)}{x}$

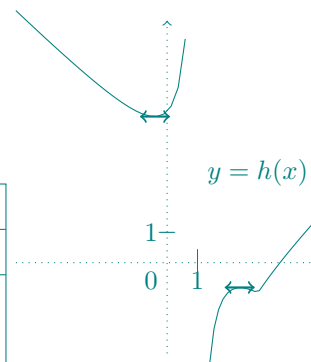
Résultat attendu : Les calculs se font par calcul direct, croissances comparées, composition ou encadrement.

1. 0
2. 0
3. $-\infty$
4. 0
5. 1
6. 0
7. 0
8. 0
9. 0
10. $-\infty$
11. 0
12. 0

Exercice 11 (★★). Étudier la fonction h définie par $h(x) = |x-3| - \frac{2}{x-1}$ sur un ensemble de définition à déterminer. Tracer sa courbe représentative en précisant les tangentes aux points remarquables.

Résultat attendu : L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. L'étude fournit le tableau de variations et la courbe suivants :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$-\frac{1}{2}$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$2 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$	$-\infty$	$2 - 2\sqrt{2}$	$+\infty$



Exercice 12 (★★). Soit $\lambda > 0$ et soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f : t \mapsto e^{\lambda t}$. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x$$

1. Réécrire cette équation à l'aide de la fonction f .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Montrer que x est solution de (E).
3. En remarquant que f est strictement croissante sur \mathbb{R} , montrer que réciproquement, si x est solution de (E), alors $f(x) = x$.
4. Étudier les variations de la fonction $g : t \mapsto f(t) - t$.
5. En déduire, selon les valeurs de λ , le nombre de solutions de l'équation (E).

Résultat attendu :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, (E) $\iff f \circ f(x) = x$.
2. On utilise la relation $f \circ f(x) = f(x) = x$.
3. La stricte croissance s'obtient par étude de la dérivée. La réciproque se montre ensuite par l'absurde.
4. Une étude de fonction donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-\ln(\lambda)}{\lambda}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{1+\ln(\lambda)}{\lambda}$	$+\infty$

5. On rencontre trois cas de figure :
 - si $\lambda > e^{-1}$, (E) n'a aucune solution.
 - si $\lambda = e^{-1}$, (E) a une unique solution.
 - si $\lambda < e^{-1}$, (E) a exactement deux solutions.

Exercice 13 (★). Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants.

1. $z_1 = 1 + 2i$

2. $z_2 = -\frac{3}{2} - i$

Résultat attendu :

1. $z_1 = \sqrt{5}e^{i \arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})}$ ou $z_1 = \sqrt{5}e^{i \arcsin(\frac{2}{\sqrt{5}})}$.
2. $z_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}e^{-i \arccos(-\frac{3}{\sqrt{13}})}$ ou $z_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}e^{i(\pi - \arcsin(-\frac{2}{\sqrt{13}}))}$.

Exercice 14 (★★).

1. Montrer que pour tout $s \in [-1, 1]$, $\arccos(s) + \arcsin(s) = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que si $t \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ vaut $\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } t > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$

Résultat attendu : Dans les deux cas, on se ramène à l'étude d'une fonction bien choisie.