Exercices: Intégrales sur un intervalle quelconque

Exercice 1. Pour chacune des intégrales suivantes, étudier sa convergence et si elle existe, la calculer.

1. $L = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$
2. $M = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) dx$
3. $N = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$ (utiliser une intégration par parties et la relation $\displaystyle\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$)
4. $J = \displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ (utiliser le changement de variable $x = \sin(z)+1$)

Exercice 2. Étudier la nature de chacune des intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\ln(1-t)} dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3} dt$
3. $I_3 = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t\sqrt{t}} dt$

Exercice 3. Étudier la nature de chacune des intégrales suivantes :

1. $I_4 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)} dx$
2. $I_5 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x} dx$
3. $I_6 = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx$

Exercice 4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_k(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-kt} dt$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $I_k(p)$ converge.
2. Calculer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $I_k(p+1)$ en fonction de $I_k(p)$. En déduire la valeur de $I_k(p)$, pour tout entier naturel p.

Exercice 5. La fonction Γ est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Exercice 6.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+xe^t} dt$ converge. On note alors f l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+xe^t} dt.$$
2. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. (a) En utilisant le changement de variable $u = xe^t$ que l'on justifiera, montrer que :
$$f(x) = \ln x(\ln x - \ln(1+x)) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln u}{u(1+u)} du.$$
   (b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$. Retrouver ainsi le sens de variations de f.

Exercice 7. Soit $x \geqslant 0$, on pose $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t^2 x)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que $h(x)$ est bien définie pour tout $x \geqslant 0$. Calculer $h(0)$.

2. (a) Montrer que pour tout $u \geqslant 0$, $|\exp(-u) - 1 + u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}$.

   (b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \exp(-t^2 x)}{1+t^2} dt.$$

   (on pourra revenir à la définition de la dérivée de h en x).

   Dans la suite, on admet que h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer qu'il existe une constante A telle que pour tout $x > 0$, $h(x) - h'(x) = \dfrac{A}{\sqrt{x}}$.

4. On pose pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = \exp(-x) h(x)$.

   (a) Montrer que $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - A \displaystyle\int_0^x \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} dt$.

   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt$. On pourra simplifier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} dt$ en posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$.