Intégration

Exercice 1 (★). On admet que les intégrales suivantes (paramétrées par $n \in \mathbb{N}^*$) sont bien définies. Montrer qu'elles convergent vers 0 (quand $n \to +\infty$), puis déterminer un équivalent de B_n et C_n :

1. $A_n = \displaystyle\int_1^2 (\ln(t))^n dt$
2. $B_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \sqrt{x} e^{-x} dx$
3. $C_n = \displaystyle\int_0^{1/n} e^t \cos(t^2) dt$
4. $D_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{2x} dx$
5. $E_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$
6. $F_n = \displaystyle\int_0^3 \arctan(t) e^{-nt} dt$
7. $G_n = \displaystyle\int_n^{n^2} e^{-x^2} dx$
8. $H_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{t}{n}\right) e^{t^2} dt$

Exercice 2 (★★). Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $A_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t} e^{t/n} dt$
2. $B_n = \displaystyle\int_1^2 x \arctan(nx) dx$
3. $C_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^t}{1+t^{2n}} dt$
4. $D_n = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{e^t}{1+t^{2n}} dt$

Exercice 3 (★). On définit les suites réelles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_{n+2} en fonction de J_n.
3. Déterminer la limite de la suite $((n+1)J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 (★). Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Étudier sa parité.
2. Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.
3. (★★) Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 5 (★). Soit φ et f les fonctions définies par : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = \dfrac{e^t}{t}$ et $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction φ est continue sur l'intervalle d'extrémités x et $2x$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. En déduire les variations de f.
3. A l'aide d'encadrements, déterminer la limite de f en 0^+ et 0^-.
4. Compléter le tableau de variations de f avec les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 6 (★★). Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,2], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^2 f(t) dt = 2$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7 (★). Déterminer la limite des suites définies par : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}$.

Exercice 8 (★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

1. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

Exercice 9 (★). Prouver que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \dfrac{u}{2}\right) \leqslant \dfrac{3}{8} u^2$.

Exercice 10 (★). Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.