Exercices: Intégration

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes quand elles existent :

1. $A = \int_0^{2e} te^{-t^2}dt$
2. $B = \int_0^{e^2} \frac{1}{u\ln(u)}du$
3. $C = \int_0^{\pi} (\sin(u))^3\cos(u)du$
4. $D = \int_0^{-2} te^{-t^2}dt$
5. $F = \int_0^{\pi} (\cos(t))^2dt$
6. $G = \int_0^1 \frac{t}{t+1}dt$
7. $H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{t^2+1}dt$

Exercice 2. Prouver qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$, $\frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}$ puis calculer

$$I = \int_2^e \frac{1}{u^2-1}du.$$

Exercice 3. Étudier le sens de variation de la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = \int_{-2}^x \frac{u-1}{u^4+1}du.$$

Exercice 4. Soit φ et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\varphi(t) = \frac{e^t}{t} \quad \text{et} \quad f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt.$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction φ est continue sur l'intervalle d'extrémités x et $2x$.
2. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de x pour $x \neq 0$. En déduire les variations de f sur son ensemble de définition.
3. A l'aide d'encadrements, déterminer la limite de f en 0^+ et 0^-. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Construire le tableau de variations et tracer l'allure de la courbe C_f.

Exercice 5. À l'aide d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t+1)\sin(t)dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin(t)dt.$$

Exercice 6. On définit les suites réelles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n\ln(1+x^2)dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_{n+2} en fonction de J_n.
3. Déterminer la limite de la suite $((n+1)J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes en effectuant pour chacune le changement de variable indiqué.

1. $I = \int_1^4 \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2}dx$, $t = \frac{4}{x}$.
2. $J = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^3}dx$, $u = x^2+1$.
3. $K = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$, $u = 1+x^4$.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes en effectuant pour chacune le changement de variable indiqué.

1. $L = \int_1^4 \exp(\sqrt{x})dx$, $u = \sqrt{x}$.
2. $M = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}dx$, pour $a > 0$, $u = \frac{1}{x}$.

Exercice 9. Calculer, en effectuant un changement de variable affine, l'intégrale :

$$I = \int_3^4 \frac{3}{10-2y+y^2}dy.$$

Exercice 10. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(a+b-t) = f(t)$.

1. Montrer par un changement de variable que :

$$\int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(u)du.$$

2. Utiliser la question précédente pour calculer

$$L = \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+(\cos t)^2}dt.$$

On pourra utiliser le changement de variables $u = \cos t$.

Exercice 11. On définit pour tout p et q entiers naturels l'intégrale

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx.$$

1. Justifier l'existence de $I_{p,q}$. Si $q \neq 0$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$.
2. En déduire la valeur de $I_{p,q}$ en fonction de p et de q.
3. En déduire, à l'aide du changement de variable $u = \sin(x)^2$, la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{2p+1}\cos(x)^{2q+1}dx$.

Exercice 12. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par : pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$

Exercice 13. 1. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(t) = \ln(t+\sqrt{1+t^2})$.

2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$ définie par : pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}.$$