Intégration

Exercice 1 (★). On admet que les intégrales suivantes (paramétrées par $n \in \mathbb{N}^*$) sont bien définies. Montrer qu'elles convergent vers 0 (quand $n \to +\infty$), puis déterminer un équivalent de B_n et C_n :

1. $A_n = \displaystyle\int_1^2 (\ln(t))^n dt$
2. $B_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \sqrt{x}e^{-x}dx$
3. $C_n = \displaystyle\int_0^{1/n} e^t \cos(t^2)dt$
4. $D_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{2x}dx$
5. $E_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$
6. $F_n = \displaystyle\int_0^3 \arctan(t)e^{-nt}dt$
7. $G_n = \displaystyle\int_n^{n^2} e^{-x^2}dx$
8. $H_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{t}{n}\right)e^{t^2}dt$

Résultat attendu : On procède par encadrements bien choisis. On trouve ensuite $B_n \sim \sqrt{n}e^{-n}$ et $C_n \sim \frac{1}{n}$

Exercice 2 (★★). Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $A_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}e^{t/n}dt$
2. $B_n = \displaystyle\int_1^2 x\arctan(nx)dx$
3. $C_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^t}{1+t^{2n}}dt$
4. $D_n = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{e^t}{1+t^{2n}}dt$

Résultat attendu : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{2}{3}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} B_n = \frac{3\pi}{4}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} C_n = e - \frac{1}{e}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} D_n = e - \frac{1}{e}$.

Exercice 3 (★). On définit les suites réelles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_{n+2} en fonction de J_n.
3. Déterminer la limite de la suite $((n+1)J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Résultat attendu :

1. On procède par encadrement.
2. Une intégration par parties donne $I_{n+2} = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{n+1}{2}J_n$.
3. La limite cherchée vaut $\ln(2)$.

Exercice 4 (★). Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$.

1. Étudier sa parité.
2. Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.
3. (★★) Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.

Résultat attendu :

1. F est impaire sur $\mathbb{R}$.
2. F est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. On montre que F est majorée sur $\mathbb{R}$ (en se ramenant au cas d'une variable $t \in [1,x]$), puis on conclut à l'aide de la question précédente.

Exercice 5 (★). Soit φ et f les fonctions définies par : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = \dfrac{e^t}{t}$ et $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)dt$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction φ est continue sur l'intervalle d'extrémités x et $2x$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. En déduire les variations de f.
3. A l'aide d'encadrements, déterminer la limite de f en 0^+ et 0^-.
4. Compléter le tableau de variations de f avec les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Résultat attendu :

1. Une disjonction de cas sur le signe donne la continuité.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{x} \geqslant 0$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Les deux limites recherchées valent $\ln(2)$.
4. Des encadrements donnent $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = 0$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(2) \;\Vert\; \ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 6 (★★). Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,2],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt = 2$. Montrer que f admet un point fixe.
__**Résultat attendu :**__ On applique le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.

Exercice 7 (★). Déterminer la limite des suites définies par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$ et $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}$.

__**Résultat attendu :**__ Par propriétés des sommes de Riemann, u converge vers $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2}$ et v vers $\dfrac{1}{\ln(2)}$.

Exercice 8 (★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

1. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n \geqslant 1,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

__**Résultat attendu :**__

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
2. v converge vers $\ln(1+\sqrt{2})$ par propriétés des sommes de Riemann.

Exercice 9 (★). Prouver que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \dfrac{u}{2}\right) \leqslant \dfrac{3}{8}u^2$.
__**Résultat attendu :**__ On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie.

Exercice 10 (★). Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.
__**Résultat attendu :**__ On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie.