Exercices PCSI
É.Bouchet

Intégration

Exercice 1 (★). On admet que les intégrales suivantes (paramétrées par $n \in \mathbb{N}^*$) sont bien définies. Montrer qu'elles convergent vers 0 (quand $n \to +\infty$), puis déterminer un équivalent de B_n et C_n :

1. $A_n = \int_1^2 (\ln(t))^n dt$
2. $B_n = \int_n^{n+1} \sqrt{x} e^{-x} dx$
3. $C_n = \int_0^{1/n} e^t \cos(t^2) dt$
4. $D_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$
5. $E_n = \int_{-1}^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$
6. $F_n = \int_0^3 \arctan(t) e^{-nt} dt$
7. $G_n = \int_n^{n^2} e^{-x^2} dx$
8. $H_n = \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{t}{n}\right) e^{t^2} dt$

Résultat attendu : On procède par encadrements. On trouve ensuite $B_n \sim \sqrt{n} e^{-n}(1 - \frac{1}{e})$ et $C_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 2 (★★). Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $A_n = \int_0^1 \sqrt{t} e^{t/n} dt$
2. $B_n = \int_1^2 x \arctan(nx) dx$
3. $C_n = \int_{-1}^1 \frac{e^t}{1+t^{2n}} dt$
4. $D_n = \int_{-1}^2 \frac{e^t}{1+t^{2n}} dt$

Résultat attendu : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \dfrac{3\pi}{4}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = e - \dfrac{1}{e}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = e - \dfrac{1}{e}$.

Exercice 3 (★). On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$ et $J_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_{n+2} en fonction de J_n.
3. Déterminer la limite de la suite $((n+1)J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Résultat attendu :

1. On procède par encadrement.
2. Une intégration par parties donne $I_{n+2} = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{n+1}{2} J_n$.
3. La limite cherchée vaut $\ln(2)$.

Exercice 4 (★). Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Étudier sa parité.
2. Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.
3. (★★) Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.

Résultat attendu :

1. F est impaire sur $\mathbb{R}$.
2. F est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. On montre que F est majorée sur $\mathbb{R}$ (en se ramenant au cas d'une variable $t \in [1, x]$), puis on conclut à l'aide de la question précédente.

Exercice 5 (★). Soit φ et f les fonctions définies par : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = \frac{e^t}{t}$ et $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction φ est continue sur l'intervalle d'extrémités x et $2x$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. En déduire les variations de f.
3. A l'aide d'encadrements, déterminer la limite de f en 0^+ et 0^-.
4. Compléter le tableau de variations de f avec les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Résultat attendu :

1. Une disjonction de cas sur le signe donne la continuité.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \geqslant 0$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Les deux limites recherchées valent $\ln(2)$.
4. Des encadrements donnent $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = 0$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$ || $\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 6 (★★). Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,2], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt = 2$. Montrer que f admet un point fixe.

Résultat attendu : On applique le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.

Exercice 7 (★★★). Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (f(t))^n dt$, et on suppose que la suite $(I_n)_n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant 1$.
2. En considérant la suite $(I_{2n})_n$, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.
3. En déduire f.

Résultat attendu :

1. On montre que sinon, la suite I est bornée et tend vers $+\infty$.
2. On montre que cette suite est décroissante et minorée, donc convergente. Puis qu'elle est stationnaire, et on regarde ce que cela nous apprend sur les fonctions intégrées.
3. f est une fonction constante égale à -1, 0 ou 1.

Exercice 8 (★). Déterminer la limite des suites définies par : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$ et $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}$.

Résultat attendu : Par propriétés des sommes de Riemann, u converge vers $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2}$ et v vers $\dfrac{1}{\ln(2)}$.

Exercice 9 (★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

1. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

Résultat attendu :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
2. v converge vers $\ln(1+\sqrt{2})$ par propriétés des sommes de Riemann.

Exercice 10 (★★). Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Résultat attendu : On montre en se ramenant à une somme de Riemann que cette limite vaut $+\infty$.

Exercice 11 (★★). Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Montrer que si $\alpha = 2$, la suite (u_n) est divergente.
2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$, la suite (u_n) converge vers 1.

Résultat attendu : Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, on se ramène à étudier $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. On montre que la suite diverge vers $+\infty$ en se ramenant à une somme de Riemann.
2. On montre la convergence en se ramenant à un théorème d'encadrement.

Exercice 12 (★). Prouver que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \dfrac{u}{2}\right) \leqslant \dfrac{3}{8}u^2$.

Résultat attendu : On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie.

Exercice 13 (★). Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

Résultat attendu : On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie.

Exercice 14 (★★). Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. On suppose que $|f|$ et $|f''|$ sont majorées sur $\mathbb{R}$ par M_0 et M_2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre x et $x + a$ à l'ordre 1.
2. En déduire que $|f'(x)| \leqslant \frac{2}{a} M_0 + \frac{a}{2} M_2$.
3. Montrer que $|f'|$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par $2\sqrt{M_0 M_2}$ (Ce résultat est appelé inégalité de Kolmogorov).

Résultat attendu :

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc $f(x+a) = f(x) + af'(x) + \int_x^{x+a} f''(t)(x+a-t)dt$.
2. On le déduit de la question précédente par inégalité triangulaire puis calcul d'intégrales.
3. On minimise en a l'expression obtenue à la question précédente.

Exercice 15 (Type DS)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. (a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.
   (b) Soit $x \in [n, +\infty[$. Minorer $f_n(x)$, puis établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel de $[n, +\infty[$, noté u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. (a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
   (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}})$.
   (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que $u_n - n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Résultat attendu :

1. (a) $t \to e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $[n, +\infty[$, donc (par théorème fondamental de l'analyse) sa primitive f_n est de classe C^1 sur cet intervalle. On a de plus $\forall x \in [n, +\infty[$, $f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$.
   (b) Soit $t \in [n, x]$. La croissance de l'exponentielle et de la racine sur $\mathbb{R}_+$ donnent $e^{\sqrt{t}} \geqslant e^{\sqrt{n}}$. Or $x \geqslant n$, donc par croissance de l'intégrale $f_n(x) \geqslant \int_n^x e^{\sqrt{n}} dt = e^{\sqrt{n}}(x - n)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{n}}(x - n) = +\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

   Rmq : la minoration $e^{\sqrt{t}} \geqslant 1$ suivie des mêmes étapes convenait également.
   (c) Par 1.a, la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$. De plus, par 1.b, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f_n(n) = \int_n^n e^{\sqrt{t}} dt = 0$. Donc par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement croissante de $[n, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Or $1 \in [0, +\infty[$, donc $f_n(x) = 1$ admet une unique solution réelle dans $[n, +\infty[$.
2. (a) Par 1.c, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [n, +\infty[$, donc $u_n \geqslant n$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc par théorème de comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [n, u_n]$, alors $e^{\sqrt{u_n}} \geqslant e^{\sqrt{t}} \geqslant e^{\sqrt{n}}$. Par croissance de l'intégrale (comme $u_n \geqslant n$), on obtient $e^{\sqrt{u_n}}(u_n - n) \geqslant f(u_n) \geqslant e^{\sqrt{n}}(u_n - n)$. Or $f_n(u_n) = 1$, donc $e^{\sqrt{u_n}}(u_n - n) \geqslant 1$ et $1 \geqslant e^{\sqrt{n}}(u_n - n)$. Diviser ces inégalités par les exponentielles (strictement positives) donne l'encadrement demandé.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par 2.b, $e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant v_n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$. Or par 2.a, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-\sqrt{u_n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$. Donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
   (b) Soit $x \geqslant -1$, alors $\frac{x^2}{4} \geqslant 0$ et on a $0 \leqslant 1 + x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{4} = (1 + \frac{x}{2})^2$. Par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $\sqrt{1+x} \leqslant \left|1 + \frac{x}{2}\right| = 1 + \frac{x}{2}$.
   Rmq : on pouvait aussi faire une étude de fonction, mais c'était plus long.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u_n = n + v_n$, on a $e^{-\sqrt{u_n}} = e^{-\sqrt{n+v_n}} = e^{-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}}$. Or $\frac{v_n}{n} \geqslant 0$, donc par la question précédente, $\sqrt{1 + \frac{v_n}{n}} \leqslant 1 + \frac{v_n}{2n}$. Par produit avec $-\sqrt{n} \leqslant 0$, on en déduit $-\sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{v_n}{n}} \geqslant -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}$. Donc par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}})$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 2.b et 3.c, on sait que $e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$. Or $e^{-\sqrt{n}} > 0$, donc $\exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \leqslant \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leqslant 1$.

   Or par 3.a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}) = 1$ (continuité de l'exponentielle en 0). Donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$. On en déduit bien que $u_n - n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.