Exercices: Limites d'une fonction en un point

Exercice 1. Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+|x|}{2x^2-|x|}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2-16}{x^3-8}$
4. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{\pi x}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$

Exercice 2. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\lfloor x\rfloor - x$.

1. Encadrer f par deux fonctions polynômes et en déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On pose pour x non nul, $g(x) = \dfrac{2\lfloor x\rfloor - x}{x}$. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$, puis en 0.

Exercice 3. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$. Déterminer son ensemble de définition E_f et les limites de f aux bornes de E_f. Peut-on définir un prolongement par continuité de f ?

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2+1}$ pour $x > -1$ et $f(x) = e^{x+1}$ pour $x \leqslant -1$. Est-elle continue en -1 ?

Exercice 5. Soit la fonction $g : x \to \dfrac{x^2+2x-3}{x(x^2-1)}$. Déterminer son ensemble de définition E_g et les limites de g aux bornes de E_g. Peut-on définir un prolongement par continuité de g ?

Exercice 6. Soit la suite w définie par $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \sqrt{12 + w_n}$.

1. Prouver que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leqslant 4$.
2. Déterminer le sens de variations de la suite w.
3. La suite w est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 7 (Représentation graphique et étude)**.** Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 5}{u_n + 2}.$$

1. Prouver que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, +\infty[$.
2. Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{6x+5}{x+2}$. En déduire la représentation des réels u_0, u_1 et u_2.
3. Conjecturer et déterminer le sens de variation de la suite u.
4. La suite u est-elle majorée ? Est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?