Limites et continuité

Exercice 1 (★). Calculer les limites (lorsqu'elles existent) en $x \to 0$ et en $x \to +\infty$ de :

1. $u_1(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$
2. $u_2(x) = \sin(x) e^{-x}$
3. $u_3(x) = x^3 \cos(x)$
4. $u_4(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2}$

Résultat attendu :

1. 0 en 0, $+\infty$ en $+\infty$
2. 0 en 0, 0 en $+\infty$
3. 0 en 0, rien en $+\infty$
4. rien en 0, 0 en $+\infty$

Exercice 2 (★★). Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+|x|}{2x^2-|x|}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-16}{x^3-8}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$

Résultat attendu :

1. -1
2. -1
3. $\dfrac{4}{3}$
4. pas de limite
5. $\dfrac{1}{\pi}$
6. $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$
7. pas de limite
8. $\dfrac{-1}{4}$

Exercice 3 (★★). À l'aide de changements de variables et des formules de composition déterminer les limites :

1. $\displaystyle\lim_{s\to 1^+} \frac{(s-1)\ln(s-1)}{s^2}$
2. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^2 e^{\frac{1}{t}}$

Résultat attendu :

1. 0 en posant $u = s-1$
2. $+\infty$ en posant $x = \dfrac{1}{t}$

Exercice 4 (★). Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1+\ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)-x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Résultat attendu : Les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (★★). Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $\forall x \in]-1,4[,\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ est impair} \\ x & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ est pair} \end{cases}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \lfloor x \rfloor$

Résultat attendu :

1. f est continue sur $]-1,4[\setminus\{2,3\}$
2. f est continue sur $\{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$

Exercice 6 (★). Soit u et v deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\begin{cases} u(0)=0 \\ v(0)=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(1)=1 \\ v(1)=0 \end{cases}$.
Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $u(x) = v(x)$.
Résultat attendu : On montre par théorème des valeurs intermédiaires que $x \mapsto u(x) - v(x)$ atteint 0.

Exercice 7 (★★). Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.
Résultat attendu : On montre par théorème des valeurs intermédiaires que $x \mapsto f(x) - x$ atteint 0.

Exercice 8 (★★★). Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,1[$.
Montrer que g admet un point fixe.
Résultat attendu : On montre par théorème des valeurs intermédiaires que $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x}$ atteint 1.

Exercice 9 (★). Montrer (sans étude de fonction) que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t\ln(t)}{1+t^2} \end{array}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
Résultat attendu : On utilise des valeurs particulières de limites et le théorème des bornes atteintes appliqué sur un segment judicieusement choisi.

Exercice 10 (★★). Montrer (sans étude de fonction) que $g : \begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t\sin(t-1)}{t-1} + \dfrac{t^2\cos(t)}{e^t} \end{array}$ est bornée sur $]1,+\infty[$.
<u>**Résultat attendu :**</u> On utilise des valeurs particulières de limites et le théorème des bornes atteintes appliqué sur un segment judicieusement choisi, en étudiant séparément les deux termes de la somme.

Exercice 11 (★★★). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
<u>**Résultat attendu :**</u> On raisonne par l'absurde en supposant que f atteint au moins deux valeurs distinctes, puis en exploitant ce que la limite nous apprend et en cherchant une contradiction avec la périodicité.

Exercice 12 (★). Montrer que l'équation $e^{-x^2} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
<u>**Résultat attendu :**</u> On applique le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto e^{-x^2} - x$ pour déterminer le nombre d'antécédents de 0.

Exercice 13 (★). Le but de l'exercice est d'étudier pour tout $n \geqslant 2$ les solutions de l'équation $e^x = x + n$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) et leur comportement lorsque $n \to +\infty$.

1. Réaliser une étude complète de la fonction $f : x \mapsto e^x - x$ (ensemble de définition, tableau de variation, limites, allure du graphe).
2. On fixe un entier naturel $n \geqslant 2$. Déduire de la question précédente que l'équation $e^x = x + n$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, solutions que l'on note x_n et y_n (avec $x_n < y_n$).
3. (★★) Déterminer la limite des suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$.
4. (★★) Démontrer que les suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ sont monotones.

<u>**Résultat attendu :**</u>

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. Cela donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On applique deux fois le théorème de la bijection (sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$).
3. On utilise l'égalité $e^{x_n} - n = x_n$ et une majoration bien choisie pour montrer que x diverge vers $-\infty$, puis l'égalité $e^{y_n} = y_n + n$ et une minoration bien choisie pour montrer que y diverge vers $+\infty$.
4. On utilise la monotonie de $(f_{|\mathbb{R}_-^*})^{-1}$ et de $(f_{|\mathbb{R}_+^*})^{-1}$ pour montrer que y est croissante et x décroissante.