Exercices PCSI
É.Bouchet

Matrices et applications linéaires

Exercice 1 (★). Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique :

1. la symétrie axiale, dans $\mathbb{R}^2$, par rapport à la droite d'équation $y = -x$.
2. la rotation, dans $\mathbb{R}^2$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ (par rapport à l'origine).
3. la rotation, dans $\mathbb{R}^2$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ (par rapport à l'origine).

Résultat attendu :

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 2 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chacune des applications linéaires φ suivantes, déterminer la matrice qui la représente dans une base bien choisie (on ne demande pas de montrer que la famille choisie est une base).

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array}$
2. le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_3)$.
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) + \int_0^1 P(t)dt \end{array}$
4. $\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \exp) & \to & \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \exp) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$

Résultat attendu :

1. $\mathrm{Mat}_{(1,X,...,X^n)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
2. $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\mathrm{Mat}_{(1,X,...,X^n)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$
4. $\mathrm{Mat}_{(\cos,\sin,\exp)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (★). Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On pose $f_3 = (-1, 1, 1)$, $f_2 = u(f_3) - f_3$ et $f_1 = u(f_2) - f_2$.

1. Calculer les coordonnées de f_2 et f_1 dans la base canonique.
2. Vérifier que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice N de u dans la base $\mathcal{B}$.

Résultat attendu :

1. $f_2 = (1, 0, -1)$, puis $f_1 = (0, 2, 1)$.
2. C'est une famille libre à $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ éléments.
3. $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
2. Justifier que cette matrice est inversible puis déterminer son inverse sans effectuer de calculs.

Résultat attendu :

1. La matrice contient horizontalement les valeurs du triangle de Pascal.
2. L'inverse est la matrice de $P \mapsto P(X-1)$ (tout se passe bien puisque l'application est bijective).

Exercice 5 (★). Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P(X)) = 2XP'(X) - (X^2 - 1)P''(X)$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
2. A l'aide de cette matrice, déterminer le rang de φ, puis une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et enfin une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Résultat attendu :

1. La matrice vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X$, $\varphi(X^2) = 2X^2 + 2$ et $\varphi(X^3) = 6X$.
2. $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$, une base de l'image est $(2X, 2X^2 + 2)$, une base du noyau est $(1, X^3 - 3X)$.

Exercice 6 (★). Déterminer le rang et la dimension du noyau des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
8. $H = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Résultat attendu : On calcule le rang, puis utilise le théorème du rang pour la dimension du noyau.

1. $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$
2. $\mathrm{rg}(B) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$
3. $\mathrm{rg}(C) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(C)) = 0$
4. $\mathrm{rg}(D) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 1$
5. $\mathrm{rg}(E) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(E)) = 1$
6. $\mathrm{rg}(F) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 1$
7. $\mathrm{rg}(G) = 3$, $\dim(\mathrm{Ker}(G)) = 0$
8. $\mathrm{rg}(H) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(H)) = 1$

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ deux matrices telles que $AB = 0$ et $(A+B)$ est inversible.

1. Donner un exemple de deux matrices qui vérifient ces hypothèses.
2. Comparer (au sens de l'inclusion) $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \leqslant n$.
3. Comparer $\mathrm{Im}(A + B)$ et $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) = n$.

Résultat attendu :

1. $A = 0$ et $B = I_2$ conviennent.
2. $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$, on termine à l'aide du théorème du rang.
3. $\mathrm{Im}(A+B) \subset \mathrm{Im}(A)+\mathrm{Im}(B)$, on termine à l'aide de la question précédente et de la formule de Grassman.

Exercice 8 (★). Pour les bases suivantes, déterminer la matrice $P_B^{B'}$ de passage de la base B à la base B' :

1. B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, -2)$.
2. $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
3. B est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $B' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.
4. $B = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$ et B' est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Résultat attendu : $P_B^{B'}$ vaut :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (★★). Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que φ est un projecteur, et déterminer une base $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$.
2. Déterminer les matrices de passage depuis et vers la base canonique : $P = P_{\mathrm{Can}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathrm{Can}}$.
3. Sans aucun calcul, justifier que $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Résultat attendu :

1. Une base adaptée est $((0, 0, 1), (1, 1, -2), (1, 0, -2))$ (ce n'est pas la seule base possible).
2. Pour la base adaptée proposée ci-dessus, on a $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. C'est la formule de changement de base.

Exercice 10 (★★). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ associé canoniquement à A.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et de $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice B de u est diagonale.
3. Déterminer des matrices P et P^{-1} telles que $A = PBP^{-1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n puis A^n.

Résultat attendu :

1. Une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ est $((1, 1, 1))$, une base de $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$ est $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.
2. On juxtapose les deux bases de la question précédente (attention, il faut montrer que cela donne bien une base de $\mathbb{R}^3$). Alors $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. On note C la base canonique, alors $P = P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = P_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On le montre par récurrence.
5. $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 2^{n+1}-1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$ par propriétés des matrices diagonales et en utilisant la question précédente.

Exercice 11 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée qui ne contient que des 1. On note f l'application linéaire canoniquement associée à J.

1. Déterminer le rang de f, et la dimension de son noyau.
2. Soit v le vecteur $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ (écrit ici en ligne, mais qui pourra librement être écrit en colonne). Calculer $f(v)$, et montrer qu'il s'agit d'un vecteur colinéaire à v.
3. Soit $(u_1, \dots, u_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (v, u_1, \dots, u_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
4. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$. On notera $\tilde{J}$ cette matrice.
5. Expliciter des vecteurs $u_1, \dots, u_{n-1}$ qui conviennent comme base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Conseil : bricoler avec les colonnes de J.
6. En déduire la relation de passage entre J et $\tilde{J}$, à l'aide de matrices de passages que l'on précisera (au moins l'une des deux).

Résultat attendu :

1. $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - 1$ par théorème du rang.
2. $f(v) = nv$.
3. On montre que c'est une famille libre à n éléments.
4. $\tilde{J}$ a un n en haut à gauche, et que des 0 ailleurs.
5. Si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la base canonique, $(e_n - e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ convient (puisque $f(e_i)$ est constant).
6. $J = P\tilde{J}P^{-1}$ avec $P = P_{\mathrm{Can}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = P_{\mathcal{B}}^{\mathrm{Can}}$.

Exercice 12 (Type DS)**.** On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P.$$

   (a) Rappeler la base canonique de E et en déduire $\dim(E)$.
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.
   (d) La matrice M est-elle inversible ? Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (e) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (f) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^4 = 0_E$ et $u^3 \neq 0_E$. On pose $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

   (a) Soit $P \in E$ tel que $P \notin \mathrm{Ker}(u^3)$. Montrer que $B = (P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de l'endomorphisme u dans la base B.
   (c) Justifier que la matrice de l'endomorphisme g dans la base B vaut $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1 \end{pmatrix}$.
   (d) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer sa réciproque g^{-1} en fonction de u.

Résultat attendu :

1. (a) $(1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de E, donc $\dim(E) = 4$.

   (b) Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P+Q)(X) = -3X(\lambda P+Q)(X) + X^2(\lambda P+Q)'(X)$. Donc par linéarité de la dérivée, $f(\lambda P+Q)(X) = \lambda(-3XP + X^2P'(X)) - 3XQ(X) + X^2Q'(X) = \lambda f(P)(X) + f(Q)(X)$. Donc f est une application linéaire. De plus, soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$,
   $f(P)(X) = -3X(aX^3 + bX^2 + cX + d) + X^2(3aX^2 + 2bX + c) = -bX^3 - 2cX^2 - 3dX$.
   D'où $\deg(f(P)) \leqslant 3$, et $f(P) \in E$. Donc f est un endomorphisme de E.

   (c) $f(1)(X) = -3X$, $f(X)(X) = -2X^2$, $f(X^2)(X) = -X^3$ et $f(X^3)(X) = 0$, d'où $M = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\-3&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-1&0 \end{pmatrix}$.

   (d) M est triangulaire avec des zéros sur sa diagonale, donc non inversible. Des calculs directs donnent :
   $M^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\6&0&0&0\\0&2&0&0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-6&0&0&0 \end{pmatrix}$ et $M^4 = 0_4$. Donc $\forall n \geqslant 4$, $M^n = 0_4$.

   (e) Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. Alors par identification des coefficients,
   $P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P)(X) = 0 \Leftrightarrow -bX^3 - 2cX^2 - 3dX = 0 \Leftrightarrow b = c = d = 0 \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(X^3)$.
   Donc X^3 est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Or $X^3 \neq 0$, donc X^3 est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

   (f) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}(-3X, -2X^2, -X^3) = \mathrm{Vect}(X, X^2, X^3)$, en utilisant la base canonique de E. Donc (X, X^2, X^3) est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. C'est une famille échelonnée en degré donc une famille libre, donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. (a) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on suppose que $aP + bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = 0$. Composant par u^3 donne (par linéarité) $au^3(P) + bu^4(P) + cu^5(P) + du^6(P) = 0$. Or $u^4 = u^5 = u^6 = 0_E$ et $u^3(P) \neq 0$ car $P \notin \mathrm{Ker}(u^3)$. Donc $a = 0$. Donc $bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = 0$. Composant par u^2 donne de même $b = 0$. Donc $cu^2(P) + du^3(P) = 0$. Composer par u donne alors $c = 0$, puis $d = 0$. Donc B est une famille libre. Or elle a $4 = \dim(E)$ vecteurs, c'est donc une base de E.

   (b) Un calcul direct donne $u(P) = u(P)$, $u(u(P)) = u^2(P)$, $u(u^2(P)) = u^3(P)$ et $u(u^3(P)) = u^4(P) = 0$.
   On en déduit $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

   (c) $g(P) = P + u(P) + u^2(P) + u^3(P)$, $g(u(P)) = u(P) + u^2(P) + u^3(P)$, $g(u^2(P)) = u^2(P) + u^3(P)$ et $g(u^3(P)) = u^3(P)$, donc la matrice de g dans la base $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est $\mathrm{Mat}_B(g) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1 \end{pmatrix}$.

   (d) $\mathrm{Mat}_B(g)$ est triangulaire sans zéro dans la diagonale, donc inversible. Donc g est un automorphisme de E. Calculer son inverse par pivot de Gauss avec $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne :
   $\mathrm{Mat}_B(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1 \end{pmatrix} = I_4 - \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} = I_4 - \mathrm{Mat}_B(u) = \mathrm{Mat}_B(\mathrm{id}_E - u)$.
   Par unicité de la décomposition matricielle d'un endomorphisme pour une base fixée, $g^{-1} = \mathrm{id}_E - u$.
   Variante : $(\mathrm{id}_E - u) \circ g = \mathrm{id}_E - u^4 = \mathrm{id}_E$, donc g est un automorphisme de réciproque $g^{-1} = \mathrm{id}_E - u$.