Exercices PCSI
É.Bouchet

Matrices et applications linéaires

Exercice 1 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chacune des applications linéaires φ suivantes, déterminer la matrice qui la représente dans une base bien choisie.

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array}$
2. le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_3)$.
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) + \int_0^1 P(t)dt \end{array}$
4. $\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \exp) & \to & \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \exp) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$

Résultat attendu :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (★). Pour chacune des applications linéaires φ suivantes, déterminer la matrice qui la représente dans la base canonique :

1. la symétrie axiale, dans $\mathbb{R}^2$, par rapport à la droite d'équation $y = -x$.
2. la rotation, dans $\mathbb{R}^2$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ (par rapport à l'origine).
3. la rotation, dans $\mathbb{R}^2$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ (par rapport à l'origine).

Résultat attendu :

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 3 (★). Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On pose $f_3 = (-1, 1, 1)$, $f_2 = u(f_3) - f_3$ et $f_1 = u(f_2) - f_2$.

1. Calculer les coordonnées de f_2 et f_1 dans la base canonique.
2. Vérifier que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice N de u dans la base $\mathcal{B}$.

Résultat attendu :

1. $f_2 = (1, 0, -1)$, puis $f_1 = (0, 2, 1)$.
2. C'est une famille libre à $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ éléments.
3. $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
2. Justifier que cette matrice est inversible puis déterminer son inverse sans effectuer de calculs.

Résultat attendu :

1. La matrice contient horizontalement les valeurs du triangle de Pascal.
2. L'inverse est la matrice de $P \mapsto P(X-1)$ (tout se passe bien puisque l'application est bijective).

Exercice 5 (★). Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P(X)) = 2XP'(X) - (X^2 - 1)P''(X)$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
2. A l'aide de cette matrice, déterminer le rang de φ, puis une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et enfin une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Résultat attendu :

1. La matrice vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X$, $\varphi(X^2) = 2X^2 + 2$ et $\varphi(X^3) = 6X$.
2. $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$, une base de l'image est $(2X, 2X^2 + 2)$, une base du noyau est $(1, X^3 - 3X)$.

Exercice 6 (★). Déterminer le rang et la dimension du noyau des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
8. $H = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Résultat attendu : On calcule le rang, puis utilise le théorème du rang pour la dimension du noyau.

1. $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$
2. $\mathrm{rg}(B) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$
3. $\mathrm{rg}(C) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(C)) = 0$
4. $\mathrm{rg}(D) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 1$
5. $\mathrm{rg}(E) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(E)) = 1$
6. $\mathrm{rg}(F) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 1$
7. $\mathrm{rg}(G) = 3$, $\dim(\mathrm{Ker}(G)) = 0$
8. $\mathrm{rg}(H) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(H)) = 1$

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices telles que $AB = 0$ et $(A + B)$ est inversible.

1. Donner un exemple de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifient ces hypothèses.
2. Comparer (au sens de l'inclusion) $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \leqslant n$.
3. Comparer $\mathrm{Im}(A + B)$ et $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) = n$.

Résultat attendu :

1. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ conviennent.
2. $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$, on termine à l'aide du théorème du rang.
3. $\mathrm{Im}(A+B) \subset \mathrm{Im}(A)+\mathrm{Im}(B)$, on termine à l'aide de la question précédente et de la formule de Grassman.

Exercice 8 (★). Pour les bases suivantes, déterminer la matrice de passage de la base B à la base B' :

1. B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, -2)$.
2. $B = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ et $B' = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$.
3. B est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $B' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.
4. $B = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$ et B' est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Résultat attendu : $P_B^{B'}$ vaut :

1. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$
2. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
3. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
4. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Exercice 9 (★★). Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que φ est un projecteur, et déterminer une base $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$.
2. Déterminer les matrices de passage depuis et vers la base canonique : $P = P_{\mathrm{Can}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathrm{Can}}$.
3. Sans aucun calcul, justifier que $A = P\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)P^{-1}$.

Résultat attendu :

1. Une base adaptée est $((0, 0, 1), (1, 1, -2), (1, 0, -2))$ (ce n'est pas la seule base possible).
2. Pour la base adaptée proposée ci-dessus, on a $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ et $P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
3. C'est la formule de changement de base.

Exercice 10 (★★). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ associé canoniquement à A.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et de $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice B de u est diagonale.
3. Déterminer des matrices P et P^{-1} telles que $A = PBP^{-1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n puis A^n.

Résultat attendu :

1. Une base de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ est $((1,1,1))$, une base de $\mathrm{Ker}(u-2\,\mathrm{id})$ est $((1,1,0),(-1,0,1))$.
2. On juxtapose les deux bases de la question précédente (attention, il faut montrer que cela donne bien une base de $\mathbb{R}^3$). Alors $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.
3. On note C la base canonique, alors $P=P_C^B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=P_B^C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.
4. On le montre par récurrence.
5. $B^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$ et $A^n=\begin{pmatrix}1&2^n-1&1-2^n\\1-2^n&2^{n+1}-1&1-2^n\\1-2^n&2^n-1&1\end{pmatrix}$ par propriétés des matrices diagonales et en utilisant la question précédente.

Exercice 11 (★★). Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $J\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée qui ne contient que des 1. On note f l'application linéaire canoniquement associée à J.

1. Déterminer le rang de f, et la dimension de son noyau.
2. Soit v le vecteur $(1,1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$ (écrit ici en ligne, mais qui pourra librement être écrit en colonne). Calculer $f(v)$, et montrer qu'il s'agit d'un vecteur colinéaire à v.
3. Soit $(u_1,\dots,u_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Justifier que la famille $\mathcal{B}=(v,u_1,\dots,u_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
4. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$. On notera $\tilde{J}$ cette matrice.
5. Expliciter des vecteurs $u_1,\dots,u_{n-1}$ qui conviennent comme base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Conseil : bricoler avec les colonnes de J.
6. En déduire la relation de passage entre J et $\tilde{J}$, à l'aide de matrices de passages que l'on précisera (au moins l'une des deux).

Résultat attendu :

1. $\mathrm{rg}(f)=1$ puis $\dim(\mathrm{Ker}(f))=n-1$ par théorème du rang.
2. $f(v)=nv$.
3. On montre que c'est une famille libre à n éléments.
4. $\tilde{J}$ a un n en haut à gauche, et que des 0 ailleurs.
5. Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base canonique, $(e_n-e_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ convient (puisque $f(e_i)$ est constant).
6. $J=P\tilde{J}P^{-1}$ avec $P=P_{\mathrm{Can}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\dots&0\\1&0&-1&&0\\\vdots&\vdots&0&\ddots&\vdots\\1&0&0&&-1\\1&1&1&\dots&1\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=P_{\mathcal{B}}^{\mathrm{Can}}$.