Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1 (★). On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Quels sont les produits possibles de deux de ces trois matrices ? Les calculer.

Exercice 2 (★). Soient S et T les matrices : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer S^2, T^2, ST, TS.

Exercice 3 (★). Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de deux façons différentes.
Laquelle est la plus judicieuse ?

Exercice 4 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre par la méthode du Pivot de Gauss les systèmes d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

1. $\begin{cases} (2-a)x + y + az = 0 \\ y - az = 2 \\ az = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} (2-a)x + y + az = 0 \\ y - az = 2 \\ az = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - 3z = -2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 8z = -2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 13 \\ 2x - 5y - 3z = -7 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$

Exercice 5 (★★). Résoudre, en discutant selon les valeurs du réel m, le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x - 2y + 2z & = 0 \\ 2x + y + 2mz & = 1 \\ 2x - 2y + 3z & = -1 \end{cases}.$$

Exercice 6 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la puissance n-ième de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (★★). Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 \neq 0_3$ et $A^3 = 0_3$.
2. Exprimer B en fonction de A et de la matrice I_3.
3. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ la valeur de B^n.

Exercice 8 (★★). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et de I_n (autrement dit, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_n$). Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que A^p est également une combinaison linéaire de A et I_n.

Exercice 9 (★). Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A est inversible.

Exercice 10 (★). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A - 5I_n$. Montrer que A est inversible.

Exercice 11 (★). Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $A^2 = 5A - 4I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 12 (★★). Soit $n \geqslant 2$, on pose $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont des 1. Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$. En déduire que A est inversible, et déterminer son inverse en fonction de J_n et I_n.

Exercice 13 (★). Inverser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 (★★). Étudier l'inversibilité et déterminer l'inverse éventuel de :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 (★★). Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de m la matrice $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. Résoudre, en discutant selon les valeurs de m, le système d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$(S) \quad \begin{cases} mx + y + z + t &= 0 \\ x + my + z + t &= 0 \\ x + y + mz + t &= 0 \\ x + y + z + mt &= 0 \end{cases}.$$

Exercice 16 (★★). Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & 1 & t \\ -2t & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $G = \{M(t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que le produit de deux matrices de G est une matrice de G, que les matrices de G sont inversibles et que l'inverse d'une matrice de G est encore une matrice de G.

Exercice 17 (★★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie quelques propriétés des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Déterminer $\mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que A peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. Le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ est-il une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$?