Exercices : Matrices

Exercice 1. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -1 & ia \\ b & b & -b \\ ic & c & -c \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Cet exercice vise à étudier plusieurs propriétés de ces ensembles.

1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Déterminer $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouver que A peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
4. Le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est-il une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 3. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Quels sont les produits possibles de deux de ces trois matrices ? Les calculer.

Exercice 4. Soient S et T les matrices : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer S^2, T^2, ST, TS.

Exercice 5. Calculer les puissances n-ièmes de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 \neq 0_3$ et $A^3 = 0_3$.
2. Exprimer B en fonction de A et de la matrice unité I_3.
3. En déduire les puissances B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 8. Calculer l'inverse des matrices suivantes si elles sont inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 5A - 4I_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 10. Soit $M = \begin{pmatrix} 13 & -60 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 24 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Prouver qu'il existe deux réels a et b tels que $M^2 = aM + bI_3$.
2. M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 11. Pour $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on définit la trace de la matrice A par :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. A-t-on $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$? $\mathrm{tr}(\alpha.A) = \alpha.\mathrm{tr}(A)$?
2. Soit T l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle. Montrer que T est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une base.
3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A-t-on $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$?
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrices M et N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MN - NM = I_3$.

Exercice 12. On se propose de déterminer trois suites de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les premiers trois termes a_0, b_0, c_0 et les relations de récurrences suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n + c_n \\ c_{n+1} = -a_n - 2b_n + 4c_n \end{cases}.$$

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant des opérations élémentaires, vérifier que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
3. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire les expressions respectives des termes a_n, b_n, c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n pour tout entier naturel n.