Exercices : Nombres complexes

Exercice 1. Soit $\theta \in]0, \pi[$ un réel donné. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $z_2 = 1 + e^{-i\theta}$
3. $z_3 = 1 + e^{i\theta}$
4. $z_4 = \dfrac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$
5. $z_5 = \dfrac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 - \cos\theta - i\sin\theta}$.

Exercice 2. Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2 et $z_1 z_2$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3. Soit $n \geqslant 2$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$

Exercice 4. Trouver tous les couples de complexes (u, v) qui vérifient $u^2 + v^2 = -1$ et $uv = 1$.

Exercice 5 (Cosinus d'un nombre complexe)**.** Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

1. Résoudre l'équation $e^{iz} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\cos(z) = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $A = \cos(x)^4 \sin(x)^2$ et $B = (\cos(x))^5$.

Exercice 7. Calculer $W = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{13}\right)$.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$, calculer :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \cos(ka) \right) \quad , \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \sin(ka) \right).$$

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb).$$

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout x réel, calculer

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

En déduire $P_{10}(2\pi)$ et $T_{20}\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$.